Ganzrationale Funktion (Polynomfunktion)

Definition

Def.: Eine Funktion f der Form

$f:\ D\ (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0)$

ist eine **ganzrationale Funktion** oder **Polynomfunktion** vom **Grad n**.

Bsp.:	$f(x) = 4$	Grad $n = 0$	Konstante Funktion
	$f(x) = 2x - 3$	Grad $n = 1$	Lineare Funktion
	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$	Grad $n = 2$	Quadratische Funktion
	$f(x) = x^3 - x$	Grad $n = 3$	Kubische Funktion
	$f(x) = 4x^8 - x^5 + 3x$	Grad $n = 8$	

Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

Satz: Ist x_1 eine Nullstelle der Polynomfunktion f vom Grad n ($n > 0$), so kann das Polynom f(x) als Produkt des Linearfaktors $(x - x_1)$ und eines Polynoms g(x) dargestellt werden, wobei die Polynomfunktion g vom Grad n-1 ist:

$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$

Bew.: $x = x_1$

$f(x_1) = 0$, da x_1 Nullstelle von f

$(x_1 - x_1) \cdot g(x_1) = 0 \cdot g(x_1) = 0$

$\Rightarrow\ f(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot g(x_1)$

$x \neq x_1$

Bsp.: $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

f vom Grad 2

Polynomdivision: $\frac{f(x)}{x - x_1} = (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0) : (x - x_1) = a_2 \cdot x + (a_1 + a_2 \cdot x_1) =: g(x)$

$\Rightarrow\ f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$, g vom Grad 1

allg.: ...

Bsp.: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

f ist eine Polynomfunktion vom Grad 3, $x_1 = 2$ ist eine Nullstelle von f

Polynomdivision: $\frac{f(x)}{x - 2} = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2) : (x - 2) = x^2 - x + 1$

$\Rightarrow\ f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - x + 1)$, g mit $g(x) = x^2 - x + 1$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2

Satz: **Fundamentalsatz der Algebra**

Eine Polynomfunktion vom Grad n ($n > 0$) hat höchstens n reelle Nullstellen.

Def.: Die Zahl x_1 ist eine **m-fache Nullstelle** der Polynomfunktion f vom Grad n ($m \le n$), falls f(x) dargestellt werden kann als

$$f(x) = (x - x_1)^m \cdot g(x)$$

wobei die Polynomfunktion g vom Grad n - m ist.

Def.: $x_1, x_2, ..., x_N$ seien alle N reellen Nullstellen der Polynomfunktion f, und g sei eine Polynomfunktion ohne reelle Nullstellen. Die Darstellung

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x - x_N)^{m_N} \cdot g(x)$$

heisst **Produktform** oder **Linearfaktorzerlegung** des Polynoms f(x).

Satz: Hat eine Polynomfunktion vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle x_1, so ist x_1 ein ganzzahliger Teiler des konstanten Gliedes a_0.

Bew.: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$

$f(x_1) = 0 = a_n \cdot x_1{}^n + a_{n-1} \cdot x_1{}^{n-1} + ... + a_1 \cdot x_1 + a_0$

$a_n \cdot x_1{}^n + a_{n-1} \cdot x_1{}^{n-1} + ... + a_1 \cdot x_1 = - a_0$

$x_1 \cdot (a_n \cdot x_1{}^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_1{}^{n-2} + ... + a_1) = - a_0$

Die beiden Faktoren links sind ganze Zahlen. Ebenso ist a_0 eine ganze Zahl.
$\Rightarrow$ Beide Faktoren links, also insbesondere x_1, sind ganzzahlige Teiler von a_0.

Bsp.: $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$

Auffinden einer ersten Nullstelle x_1

$a_0 = 12$, ganzzahlige Teiler von a_0: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12

$f(1) = 4 \neq 0$, $f(-1) = 12 \neq 0$
$f(2) = 0$, d.h. $x_1 = 2$ ist eine Nullstelle von f

$f(x) = (x - 2) \cdot g(x)$
$g(x) = \frac{f(x)}{x - 2} = (2x^3 - 4x^2 - 6x + 12) : (x - 2) = 2x^2 - 6$

Auffinden von weiteren Nullstellen

$g(x) = 2x^2 - 6 = 0$
$x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$

Produktform von f(x)

$$f(x) = 2(x - 2)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$