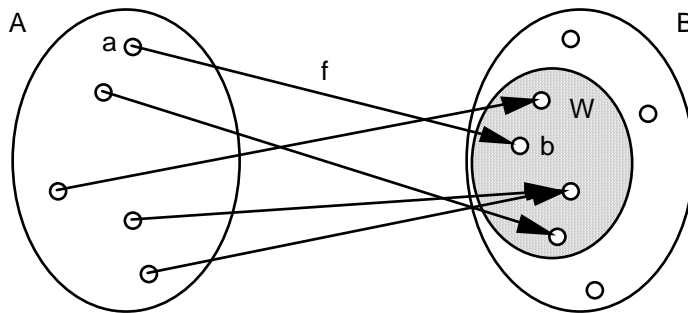


# Funktion

## Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion**  $f$  ist eine Vorschrift, die **jedem** Element  $a$  aus einer Menge  $A$  **genau ein** Element  $b$  aus einer Menge  $B$  zuordnet.

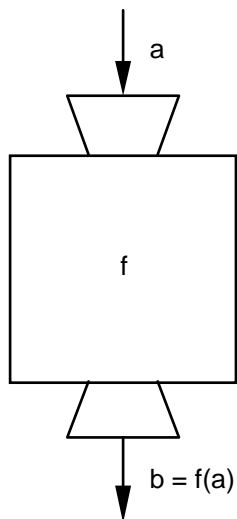


Durch die Funktion  $f$  wird die Menge  $A$  auf die Menge  $B$  **abgebildet**.

$$f: \quad A \rightarrow B \\ a \rightarrow b = f(a) \quad (\text{"f von a"})$$

Die Menge  $A$  ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge  $B$  der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat), die Menge  $W$  der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion  $f$ .

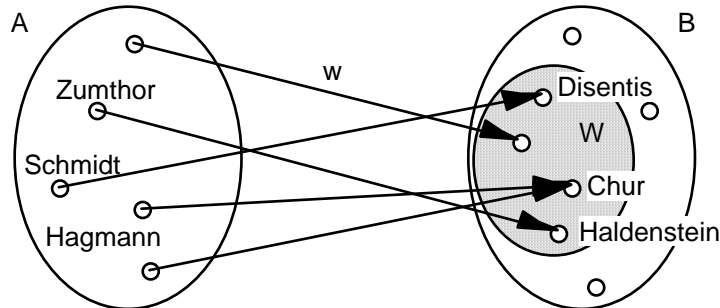
$b$  ist das zum Element  $a$  gehörige **Bildelement** (Funktionswert).



- Bsp.: 1.  $A =$  Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten  
 $B =$  Menge aller Schweizer Gemeinden

$$w: A \rightarrow B$$

$$a \rightarrow b = w(a) = \text{Wohnort von } a \text{ (Stand 2000)}$$



2.  $A =$  Menge aller Eisenbahnbrücken im Kanton Graubünden  
 $B = \{1847, 1848, 1849, \dots, 2013, 2014, 2015\}$

$$e: A \rightarrow B$$

$$b \rightarrow j = e(b) = \text{Jahr der Einweihung von } b$$

3.  $A = B =$  Menge aller Punkte einer Ebene

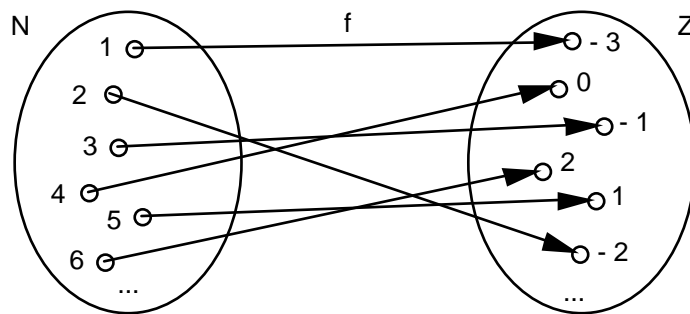
$$S_g: A \rightarrow A$$

$$P \rightarrow P' = S_g(P) = \text{Bildpunkt von } P \text{ bezüglich der Geradenspiegelung an der Geraden } g$$

4.  $A = \mathbb{N}$  (= Menge der natürlichen Zahlen)  
 $B = \mathbb{Z}$  (= Menge der ganzen Zahlen)

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \rightarrow y = f(n) = n - 4$$



5.  $A = \mathbb{R}_0^+$  (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)  
 $B = \mathbb{R}$  (= Menge der reellen Zahlen)

$$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x) = \sqrt{x}$$

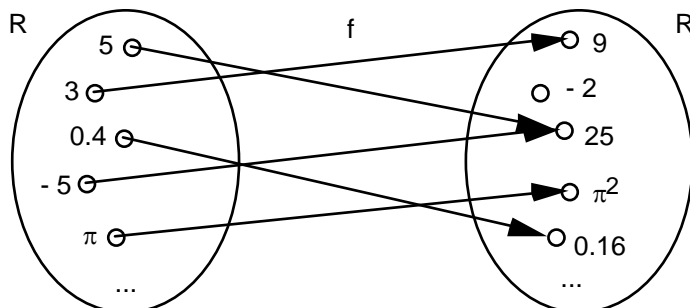
6.  $A = B = \mathbb{R}$

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = p(x) = \frac{x^3 - 3}{2x^2 + 1}$$

## Darstellung einer Funktion

### Pfeildiagramm



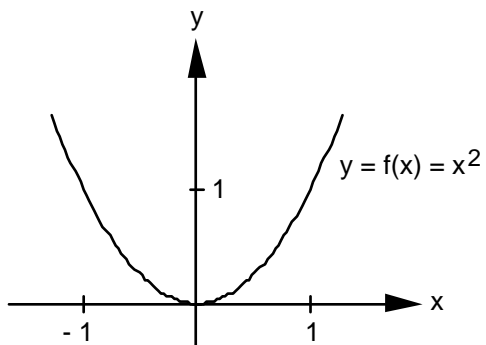
### Tabelle (Wertetabelle)

x	y
1	1
3	9
5	25
-5	25
0.4	0.16
...	...

### Funktionsvorschrift (Funktionsgleichung)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = x^2$$

### Graf



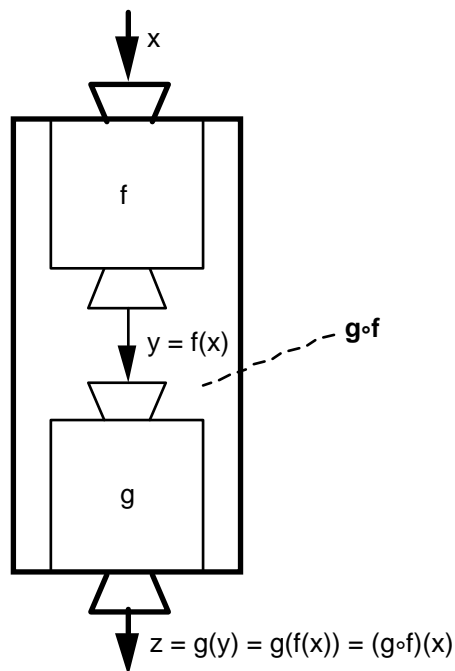
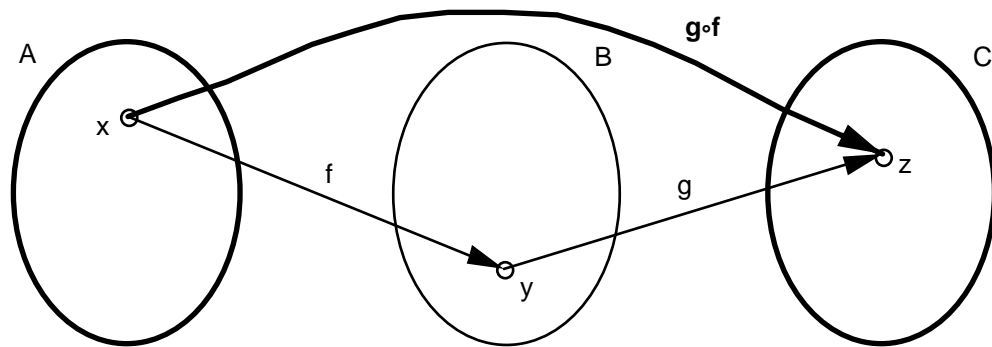
## Zusammengesetzte Funktion

Gegeben seien zwei Funktionen  $f$  und  $g$ :

$$\begin{array}{ll} f: & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} g: & B \rightarrow C \\ & y \rightarrow z = g(y) \end{array}$$

Def.: Die **zusammengesetzte Funktion**  $g \circ f$  ist definiert durch:

$$\begin{array}{ll} g \circ f: & A \rightarrow C \\ & x \rightarrow z = (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{array}$$



Bsp.:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$   $x \rightarrow y = f(x) = \frac{x}{2}$   $g: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   $y \rightarrow z = g(y) = \sqrt{y}$

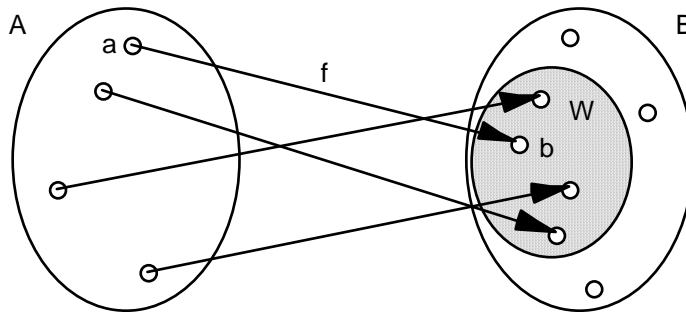
$$g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

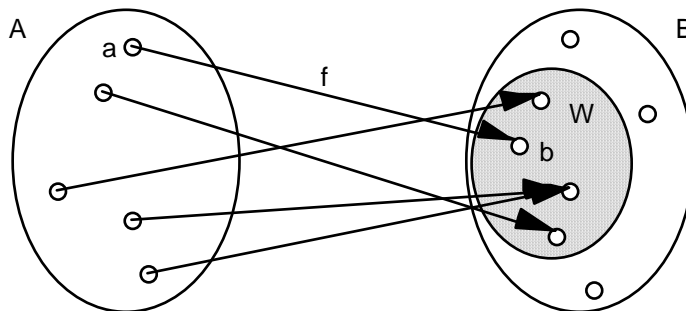
## Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  heisst **injektiv**, falls jedes Element  $b \in W$  Bildelement eines **einzigen** Elementes  $a \in A$  ist.

Injektive Funktion

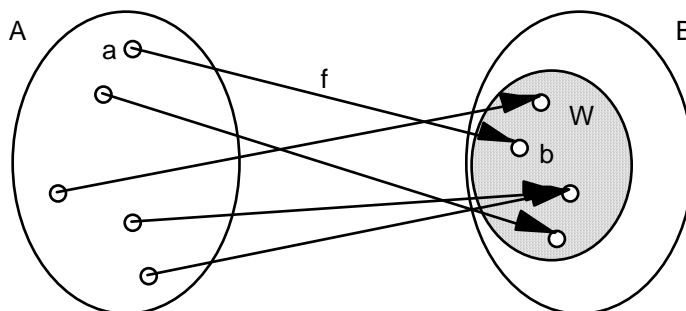


Nicht-injektive Funktion

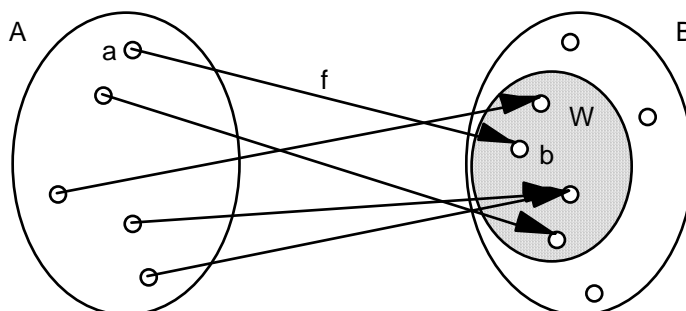


Def.: Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  heisst **surjektiv**, falls **jedes** Element  $b \in B$  als Bildelement auftritt, d.h. falls  $W = B$ .

Surjektive Funktion

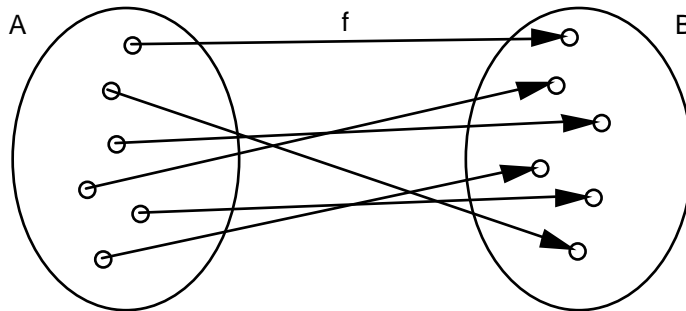


Nicht-surjektive Funktion



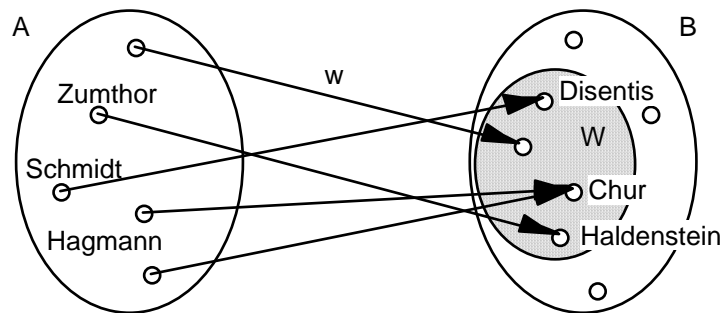
Def.: Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  heisst **bijektiv**, falls sie **sowohl injektiv als auch surjektiv** ist.

Bijektive Funktion



Bsp.: 1.  $A =$  Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten  
 $B =$  Menge aller Schweizer Gemeinden

w:  $A \rightarrow B$   
 $a \rightarrow b = w(a) =$  Wohnort von  $a$  (Stand 2000)



w nicht injektiv, w nicht surjektiv  $\Rightarrow$  w nicht bijektiv

2. f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = -x$   
 f injektiv, f surjektiv  $\Rightarrow$  f bijektiv

3. f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   
 $x \rightarrow y = f(x) = x^2$   
 f nicht injektiv, f surjektiv  $\Rightarrow$  f nicht bijektiv

4. f:  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = x^2$   
 f injektiv, f nicht surjektiv  $\Rightarrow$  f nicht bijektiv

5. f:  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   
 $x \rightarrow y = f(x) = x^2$   
 f injektiv, f surjektiv  $\Rightarrow$  f bijektiv

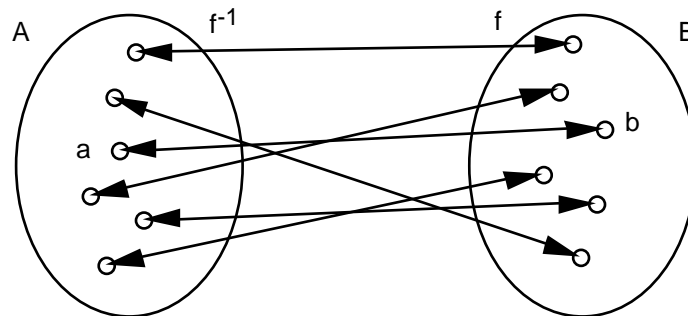
## Umkehrfunktion

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

$$\begin{aligned} f: & A \rightarrow B \\ & a \rightarrow b = f(a) \end{aligned}$$

Die **Umkehrfunktion**  $f^{-1}$  ordnet jedem Element  $b \in B$  dasjenige Element  $a \in A$  zu, welches durch die Funktion  $f$  dem Element  $b \in B$  zugeordnet wird.

$$\begin{aligned} f^{-1}: & B \rightarrow A \\ & b \rightarrow a = f^{-1}(b) \end{aligned}$$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher

B = Menge aller Sitzplätze

$$\begin{aligned} f: & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = f(x) = \text{Sitzplatz von Kinobesucher } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}: & B \rightarrow A \\ & y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \text{Kinobesucher auf Sitzplatz } y \end{aligned}$$

2. A =  $\mathbb{Z}$   
 B =  $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$$\begin{aligned} f: & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = f(x) = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}: & B \rightarrow A \\ & y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

3. f:  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   
 $x \rightarrow y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f^{-1}: & \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ & y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$

Def.: Die **identische Abbildung/Funktion**  $\mathbb{1}$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}: & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow y = \mathbb{1}(x) = x \end{aligned}$$

Bem.:  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$