Aufgaben 20 Grenzwert einer Funktion
Grenzwert einer Funktion, Grenzwertsätze, Stetigkeit

Lernziele

- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- die Grenzwertsätze anwenden können.
- beurteilen können, ob eine einfachere Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.

Aufgaben

20.1 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2:

f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_1(x) = 3x$ $\qquad$ f_2: $\mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_2(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$

a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen f_1 und f_2.

b) Beurteilen Sie für beide Funktionen f_1 und f_2, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."

20.2 Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion f, welche die folgenden Eigenschaften i) bis v) besitzt:

i) $f(x_1)$ existiert $\qquad \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existiert $\qquad f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$

ii) $f(x_2)$ existiert $\qquad \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$ existiert $\qquad f(x_2) \neq \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$

iii) $f(x_3)$ existiert $\qquad \lim\limits_{x \to x_3} f(x)$ existiert nicht

iv) $f(x_4)$ existiert nicht $\qquad \lim\limits_{x \to x_4} f(x)$ existiert

v) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert

20.3 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:

a) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 exisiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."

c) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."

e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle x_0."

f) "Wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, dann existiert an dieser Stelle x_0 der Grenzwert."

g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle x_0 definiert."

20.4 Papula 1: 312/4, 312/5, 312/6

20.5 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 5/2} \frac{5-2x}{2x^2-3x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^2-a^2}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a}}{x}$

20.6 Papula 1: 313/8, 313/9, 313/10

Lösungen

20.1 a) ...

b) Die Funktionen f_1 und f_2 unterscheiden sich nur an der Stelle $x_0 = 2$:

f_1 ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_1(2) = 6$.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert: $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = 6$

f_2 ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert jedoch: $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x) = 6$

20.2 ...

20.3 a) falsch

b) wahr

c) wahr

d) falsch

e) wahr

f) falsch

g) falsch

20.4 siehe Papula 1

20.5 a) $\frac{1}{2}$

b) 0

c) $-\frac{2}{7}$

d) 6

e) 2a

f) $-\frac{1}{a^2}$

20.6 siehe Papula 1