Aufgaben 14 Funktionstypen Exponentialfunktion

Lernziele

- den zeitlichen Velauf einer exponentiell wachsenden oder fallenden Grösse mit einer Exponentialfunktion beschreiben können.
- den Grafen der Exponentialfunktion kennen.
- die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion beurteilen können.
- einfachere Probleme zur Exponentialfunktion bearbeiten können.

Aufgaben

14.1 Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparkonto einer Bank bei einem jährlichen Zinssatz p (z.B. p = 0.5%) angelegt.

a) Zeigen Sie, dass der zeitliche Verlauf des Kapitals K durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.

Hinweis:
- Überlegen Sie sich, wie gross das Kapital nach einem Jahr, nach zwei Jahren, usw. ist.
- Leiten Sie dann eine allgemeine Formel her, die es erlaubt, das Kapital K_n nach n Jahren aus K_0, p und n zu berechnen.

b) Das Anfangskapital sei $K_0 = 1000$ Fr. und der Zinssatz p = 0.5%.
Bestimmen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

Hinweis:
- Für die Aufgabe b) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

14.2 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen f_i: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_i(x)$ $(1 \leq i \leq 4)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$f_1(x) = 2^x$ $f_2(x) = 0.2^x$ $f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x$ $f_4(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3^x$

14.3 Betrachten Sie die Exponentialfunktion

$f: A \to B,\ x \to y = f(x) = a^x$ $\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\},\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$

a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f für $A = B = \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass f bijektiv wird.

c) Skizzieren Sie die Grafen der (nun bijektiven) Funktion f und deren Umkehrfunktion

$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x)$

14.4 Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experimentes sind $5.12 \cdot 10^{20}$ radioaktive Atomkerne vorhanden. Nach 5 Stunden hat es noch deren $1.56 \cdot 10^{16}$.

Bestimmen Sie die Anzahl radioaktiver Atomkerne, welche 8 Stunden nach Beginn des Experimentes noch vorhanden sind.

Hinweis:
- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

14.5 (siehe nächste Seite)

14.5 Die Grösse einer bestimmten Bakterienkultur wächst exponentiell. Um 8:00 Uhr betrug die Individuenzahl 2'300, um 11:00 Uhr bereits 18'400.

Bestimmen Sie die Anzahl Bakterien um 13:30 Uhr.

Hinweis:
- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

14.6 Ein Kapital wird mit Zins und Zinseszins angelegt.

a) Bestimmen Sie den Zinssatz p, bei welchem sich das Kapital in n Jahren verdoppelt.

b) Berechnen Sie den in a) bestimmten Zinssatz p für n = 20.

Hinweis:
- Für die Aufgabe b) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

Lösungen

14.1 a) $K = K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^{t/[t]}$, t = Zeit, [t] = Jahre
oder
$K = K(n) = K_0 \cdot (1 + p)^n$, n = Anzahl Jahre

b) $K(5) = 1000 \cdot (1 + 0.005)^5$ Fr. = 1025.25 Fr.

14.2 …

14.3 a) f injektiv, f nicht surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

b) $A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}^+$

c) ...

14.4 $N(8h) = 3.04 \cdot 10^{13}$

14.5 N = 104'086

14.6 a) $p = \sqrt[n]{2} - 1$

b) $p = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5\%$ (gerundet)