Aufgaben 13 Funktionstypen
Trigonometrische Funktionen und Gleichungen, Arkusfunktionen

Lernziele

- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer einfacheren trigonometrischen Funktion skizzieren können.
- die Lösungen einer einfacheren trigonometrischen Gleichung von Hand bestimmen können.
- die Umkehrfunktion einer einfacheren trigonometrischen Funktion bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Betrachten Sie die einfachstmögliche Sinus-Funktion f und die aus ihr abgeleiteten Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = \sin(x)$

f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_1(x) := \sin(x+b)$ $(b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_2(x) := \sin(a \cdot x)$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

f_3: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_3(x) := A \cdot \sin(x)$ $(A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

f_4: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_4(x) := A \cdot \sin(ax+b)$ $(A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von …

i) ... f und f_1
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $b > 0$ und $b < 0$.

ii) … f und f_2
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $a > 1$ und $0 < a < 1$.

iii) … f und f_3
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $A > 1$ und $0 < A < 1$.

iv) … f und f_4 für den Fall $A > 1$, $a > 1$, $b < 0$.

b) Geben Sie für alle Funktionen f, f_1, ..., f_4 die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 an.

13.2 Papula 1: 318/5, 318/6, 318/4

13.3 Die Sinus-Funktion

$$f: \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2}\right\} \to \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -1 \le y \le 1\}$$
$$x \to y = f(x) = \sin(x)$$

ist bijektiv. Deren Umkehrfunktion f^{-1} ist die Arkussinus-Funktion arcsin (vgl. Unterricht):

$$f^{-1}: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge -1 \le x \le 1\} \to \left\{y: y \in \mathbb{R} \wedge -\tfrac{\pi}{2} \le y \le \tfrac{\pi}{2}\right\}$$
$$x \to y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

a) Die Arkuscosinus-Funktion arccos ist die Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion

$$f: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le \pi\} \to B$$
$$x \to y = f(x) = \cos(x)$$

i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Cosinus-Funktion bijektiv wird.

ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion arccos an.

iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.

b) Die Arkustangens-Funktion arctan ist die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion

$$f: \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \to B$$
$$x \to y = f(x) = \tan(x)$$

i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Tangens-Funktion bijektiv wird.

ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion arctan an.

iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.

c) Die Arkuscotangens-Funktion arccot ist die Umkehrfunktion der Cotangens-Funktion

$$f: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < \pi\} \to B$$
$$x \to y = f(x) = \cot(x)$$

i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Cotangens-Funktion bijektiv wird.

ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion arccot an.

iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.

13.4 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen:

a) $\sin(x) = a$ $(-1 \le a \le 1)$

b) $\cos(x) = b$ $(-1 \le b \le 1)$

c) $\tan(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$

d) $\cot(x) = d$ $(d \in \mathbb{R})$

13.5 Papula 1: 320/16

13.6 Bearbeiten Sie für die beiden Funktionen in der Aufgabe 318/6 im Buch Papula 1 die folgenden Teilaufgaben:

i) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass die Funktion bijektiv wird.

ii) Skizzieren Sie den Grafen der bijektiven Funktion.

iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

iv) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion ins gleiche Koordinatensystem wie in ii).

Lösungen

13.1 a) i) ...

ii) ...

iii) ...

iv) ...

b)

f:	A = 1	p = 2π	$x_0 = 0$
f_1:	A = 1	p = 2π	$x_0 = - b$
f_2:	A = 1	$p = \frac{2\pi}{a}$	$x_0 = 0$
f_3:	A = A	p = 2π	$x_0 = 0$
f_4:	A = A	$p = \frac{2\pi}{a}$	$x_0 = - \frac{b}{a}$

13.2 siehe Papula 1

13.3 a) i) $B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -1 \le y \le 1\}$

ii) $f^{-1}: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge -1 \le x \le 1\} \rightarrow \{y: y \in \mathbb{R} \wedge 0 \le y \le \pi\}$
$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$

iii) …

b) i) $B = \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left\{y: y \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arctan(x)$

iii) …

c) i) $B = \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \{y: y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y < \pi\}$
$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \text{arccot}(x)$

iii) …

13.4 a) $x_{1k} = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$x_{2k} = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) $x_{1k} = \arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$x_{2k} = - \arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $x_k = \arctan(c) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

d) $x_k = \text{arccot}(d) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

13.5 siehe Papula 1

13.6 a) i) $A = \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6}\right\}$
$B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -4 \leq y \leq 4\}$

ii) ...

iii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 2\right)$

iv) ...

b) i) $A = \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0\right\}$
$B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq y \leq 2\}$

ii) ...

iii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right)$

iv) ...