Aufgaben 12 Funktionstypen
Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Gebrochenrationale Funktion

Lernziele

- den Grafen einer Potenz-, Wurzelfunktion skizzieren können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Potenz-, Wurzelfunktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven Potenz-, Wurzelfunktion bestimmen können.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- charakteristische Eigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

Potenzfunktion, Wurzelfunktion

12.1 Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen der folgenden Potenz- bzw. Wurzelfunktionen:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^n$ für n = 2, 3, 4 und 5.

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^{-n}$ für n = 1, 2, 3 und 4.

c) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ für n = 2, 3, 4 und 5.

12.2 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten:

$f: A \to B,\ x \to y = f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}$

a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f in Abhängigkeit von n für $A = B = \mathbb{R}$.

b) Wählen Sie für A und B "grösstmögliche" Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass die Funktion f bijektiv wird.

c) Bestimmen Sie für n = 2, 3 und 4 die Umkehrfunktion f^{-1}: $B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x)$.

d) Skizzieren Sie für n = 2, 3 und 4 die Grafen von f und f^{-1}.

12.3 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten:

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^{m/n} \qquad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

b) Beurteilen Sie, ob und gegebenenfalls wie man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich von f einschränken müsste, damit f bijektiv wird.

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: ... → ... , $x \to y = f^{-1}(x)$.

12.4 Betrachten Sie die Potenzfunktionen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = a(x - x_0)^n + y_0 \qquad n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = g(x) = a(x - x_0)^{-n} + y_0 \qquad n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen von f und g. Unterscheiden Sie dabei die Fälle n gerade und n ungerade.

Hinweis:
- Gehen Sie von den Grafen aus, die Sie in der Aufgabe 12.1 skizziert haben.

Gebrochenrationale Funktion

12.5 Betrachten Sie die allgemeine gebrochenrationale Funktion

$$f: A \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0} \qquad m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

a) Geben Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von $\mathbb{R}$ an.

b) Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer echt oder unecht gebrochenrationalen Funktion.

Lösungen

12.1 a) ...

b) ...

c) ...

12.2 a) n ungerade: f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv
n gerade: f nicht injektiv, f nicht surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

b) n ungerade: $A = B = \mathbb{R}$
n gerade: $A = B = \mathbb{R}_0^+$ oder $A = \mathbb{R}_0^-$ und $B = \mathbb{R}_0^+$

c) n = 2: $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
oder
$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-, x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

n = 3: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x < 0) \end{cases}$

n = 4: $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
oder
$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-, x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$

d) ...

12.3 a) f injektiv, f nicht surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

b) Definitionsbereich = Zielbereich = $\mathbb{R}^+$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \to y = f^{-1}(x) = x^{n/m}$

12.4 ...

12.5 a) $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, wobei $x_1, x_2, ..., x_N$ die N Nullstellen des Nennerpolynoms sind $(N \leq n)$

b) ...