Aufgaben 7 Funktion
Grundbegriffe, Zusammengesetzte Funktion

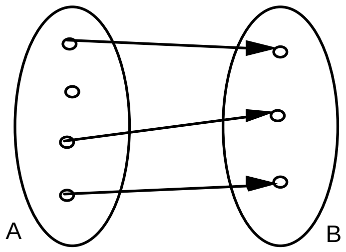
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- aus dem Grafen einer gegebenen Funktion den Definitionsbereich der Funktion herauslesen können.
- zwei gegebene Funktionen zu einer einzigen Funktion zusammensetzen können.
- eine gegebene Funktion als Zusammensetzung zweier oder mehrerer Funktionen darstellen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

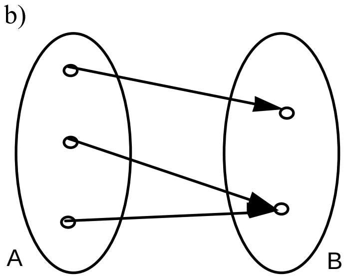
Aufgaben

7.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \rightarrow B$ ist:

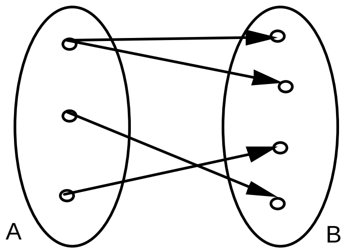
a)



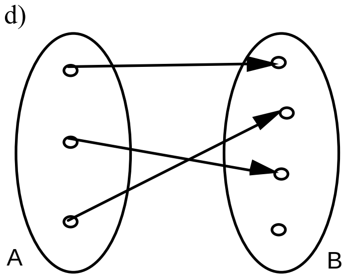
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller Architekten/-innen
f: $A \rightarrow B$, $h \rightarrow a = f(h)$ = Architekt/-in von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller Schweizer/-innen
p: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = p(x)$ = Präsident/-in von x

g) A = {1985, 1986, ... , 1994, 1995}
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
f: $A \rightarrow B$, $j \rightarrow m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
B = {1985, 1986, ... , 1994, 1995}
j: $A \rightarrow B$, $m \rightarrow j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

i) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow y = f(x) = x^2$

j) f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

k) f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \rightarrow y = f(x)$ = Ganzzahliger Teiler von x

7.2 Gegeben sind die Mengen A und B.

Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2012
$B = \mathbb{N}$

b) A = Menge aller Schweizer Firmen
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

d) $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$
$B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$

e) $A = \mathbb{R}^-$
$B = \mathbb{R}^+$

7.3 Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

a) A = {Januar, Februar, März, ..., Dezember}
$B = \{A, B, C, ..., Z\}$
$f\colon\ A \to B,\ m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

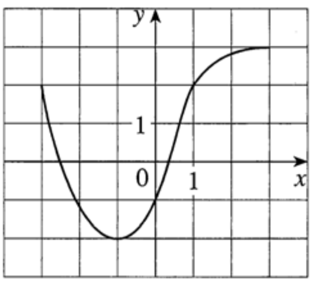
b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
$h\colon\ A \to B,\ n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) $A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}_0^+$
$b\colon\ A \to B,\ x \to y = b(x) = |x|$

d) Funktion f aus Aufgabe 7.1 h)

e) Funktion f aus Aufgabe 7.1 i)

7.4 Gegeben ist der vollständige Graf einer Funktion f:



a) Geben Sie den Funktionswert f(-1) an.

b) Schätzen Sie den Funktionswert f(2) ab.

c) Geben Sie die Werte von x an, für welche f(x) = 2 gilt.

d) Schätzen Sie die Werte von x ab, für welche f(x) = 0 gilt.

e) Geben Sie den Definitionsbereich D von f an.

f) Geben Sie den Bildbereich W von f an.

7.5 a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$f(1)$	ii)	$f(-2)$	iii)	$f(a)$
iv)	$f(b^2)$	v)	$f(a - b)$	vi)	$f(x^3 - x)$

b) g: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$g(2)$	ii)	$g(-3)$	iii)	$g(a)$
iv)	$g(b^2)$	v)	$g(a - b)$	vi)	$g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

7.6 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = x^2$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = -2y$

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = \sin(x)$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = \frac{y}{y^2+1}$

c) f: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to y = f(x) = \frac{2}{x+1}$
g: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$

d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$g = f$

e) A = Menge aller Studierenden der HTW Chur
B = Menge aller Länder der Erde
C = $\mathbb{N}$ (= Menge aller natürlichen Zahlen)

f: $A \to B$, $s \to l = f(s)$ = Herkunftsland des Studierenden s
g: $B \to C$, $l \to e = g(l)$ = Einwohnerzahl des Landes *l*

7.7 Gegeben ist die Funktion h.

Bestimmen Sie zwei Funktionen f und g, aus welchen sich die Funktion h zusammensetzt, d.h. $h = g \circ f$.

a) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = e^{-2x}$

b) h: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (x-1)\cdot\sin(2x)$

c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = x$

d) A = Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden
C = Menge aller Tage eines Jahres

h: $A \to C$, $t \to d = h(t)$ = Ostertag im Einweihungsjahr des Autobahntunnels t

7.8 Gegeben ist die folgende Funktion f:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = 3 \sin^2(4x - 3)$

Um aus x den Funktionswert $y = f(x)$ zu berechnen, werden nacheinander fünf einzelne Operationen ausgeführt. Daher kann man f auffassen als Funktion, die sich aus fünf Funktionen f_1 bis f_5 zusammensetzt, d.h. $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Bestimmen Sie die fünf Funktionen f_1 bis f_5.

7.9 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt: $g \circ f = f \circ g$

Hinweis:
- Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 7.6 und 7.7.

Lösungen

7.1 a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle $a \in A$)

b) Funktion

c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)

d) Funktion

e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle $h \in A$)

f) keine Funktion (p nicht definiert für alle $x \in A$)

g) keine Funktion (f nicht eindeutig)

h) Funktion

i) Funktion

j) keine Funktion (f nicht eindeutig)

k) keine Funktion (f nicht eindeutig)

7.2 a) i) $g\colon\ A \to B,\ d \to n = g(d)$ = Anzahl neugeborener Kinder in der Schweiz am Tag d
ii) ...
iii) ...

b) i) $s\colon\ A \to B,\ f \to k = s(f)$ = Kanton, in welchem die Firma f ihren Sitz hat
ii) ...
iii) ...

c) i) $f\colon\ A \to B,\ v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v
ii) ...
iii) ...

d) i) $d\colon\ A \to B,\ x \to y = d(x) = 2x$
ii) ...
iii) ...

e) i) $v\colon\ A \to B,\ x \to y = v(x) = -x$
ii) ...
iii) ...

7.3 a) W = {A, D, F, J, M, N, O, S}

b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}

c) $W = B$

d) $W = B$

e) $W = \mathbb{R}_0^+$

7.4 a) $f(-1) = -2$

b) $f(2) \approx 2.8$

c) $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

d) $x_1 \approx -2.5,\ x_2 \approx 0.3$

e) $D = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x \leq 3\} = [-3,3]$

f) $W = \{y\colon y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq y \leq 3\} = [-2,3]$

7.5 a)

i) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

ii) $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$

iii) $f(a) = a^3 - a$

iv) $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$

v) $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$

vi) $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

b)

i) $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$

ii) $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$

iii) $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$

iv) $g\left(b^2\right) = \frac{\left(b^2\right)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$

v) $g(a - b) = \frac{(a-b)^2}{(a-b)+1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$

vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

7.6 a) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2x^2$

b) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x) + 1}$

c) h: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$

d) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{1 + \left(x^2+1\right)^2}$

e) h: $A \to C$, $s \to e = h(s) = (g \circ f)(s) = g(f(s))$ = Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden s

7.7 a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = -2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = e^y$

b) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \to y = f(x) = x-1$
g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = y \cdot \sin\left(2(y+1)\right)$

c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = 2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = \frac{y}{2}$

d) B = Menge aller Jahre von 1900 bis heute

f: $A \to B$, $t \to j = f(t)$ = Einweihungsjahr des Autobahntunnels t
g: $B \to C$, $j \to d = g(j)$ = Ostertag im Jahr j

7.8 f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_1(x) = 4x$
f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_2(x) = x - 3$
f_3: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_3(x) = \sin(x)$
f_4: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_4(x) = x^2$
f_5: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_5(x) = 3x$

7.9 ...