Aufgaben 6 — Kegelschnitte
Kreis, Parabel

Lernziele

- aus der geometrischen Definition des Kreises die Gleichung des Kreises bestimmen können.
- aus bekannten Eigenschaften eines Kreises dessen Gleichung bestimmen können.
- die Kreisgleichung zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- aus der geometrischen Definition der Parabel die Gleichung der Parabel bestimmen können.
- die Parabelgleichung zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- verstehen, dass eine Parabel als Graf einer quadratischen Funktion aufgefasst werden kann.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Aufgaben

Kreis

6.1 Der **Kreis** ist definiert als Menge aller Punkte P einer Ebene, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben. M ist der Kreismittelpunkt und r der Kreisradius.

In dieser Aufgabe sollen Sie die Gleichung des Kreises bestimmen. Sie drückt aus, welche Punkte auf dem Kreis liegen und welche nicht. Ein Punkt P(x|y) liegt genau dann auf dem Kreis, wenn seine Koordinaten x und y die Kreisgleichung erfüllen.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem Mittelpunkt M(0|0) und dem Radius r = 2 gegeben ist durch

$$x^2 + y^2 = 4$$

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem allgemeinen Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$ und dem allgemeinen Radius r gegeben ist durch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Hinweis:
- Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MP}$ muss für jeden Punkt P des Kreises gleich r sein.

6.2 Geben Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r an:

a) M(0|0) r = 2

b) M(0|1) r = 3

c) M(2|3) r = 4

d) M(-4|1) r = 5

Hinweis:
- Verwenden Sie die Kreisgleichung aus der Aufgabe 6.1 b).

6.3 Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit den jeweiligen Eigenschaften:

a) Der Kreis hat den Mittelpunkt M(-8|6) und verläuft durch den Punkt P(-5|2).

b) Der Kreis verläuft durch den Punkt P(-2|4) und berührt die y-Achse bei y = 8.

c) Der Kreis verläuft durch den Punkt P(1|2) und berührt beide Koordinatenachsen.

d) Der Kreis verläuft durch die Punkte $P_1(1|3)$, $P_2(6|-2)$ und $P_3(5|1)$.

Hinweis:
- Gehen Sie von der Kreisgleichung in der Aufgabe 6.1 b) aus.

6.4 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden g:

a) k: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ g: $y = x$

b) k: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ g: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

6.5 Gegeben sind der Kreis k und die Gerade g:

k: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
g: $x + 2y - 5 = 0$

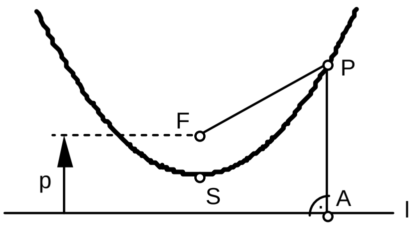
Bestimmen Sie …

a) … die Koordinaten des Mittelpunktes sowie den Radius des Kreises k.

b) … die Länge der Sehne, die der Kreis k aus der Gerade g herausschneidet.

Parabel

6.6 Die **Parabel** ist geometrisch definiert als Menge aller Punkte P, welche von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Geraden *l* den gleichen Abstand haben (vgl. Unterricht):



$\overline{PF} = \overline{PA}$

Der Punkt F heisst **Brennpunkt**, die Gerade *l* **Leitgerade** und der Punkt S **Scheitelpunkt** der Parabel.

a) Begründen Sie, dass bei jeder Parabel der Scheitelpunkt genau in der Mitte zwischen dem Brennpunkt F und der Leitgeraden *l* liegen muss.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit den folgenden Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt S liegt im Koordinatenursprung, d.h. S(0|0).
- Die Leitgerade *l* verläuft parallel zur x-Achse.

Vorgehen:

i) Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes F in Abhängigkeit des Parameters p an.

ii) Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an, und zwar in Abhängigkeit des Parameters p und der Koordinaten x und y des Punktes P(x|y).

iii) Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{PF}$ und $\overrightarrow{PA}$.

iv) Drücken Sie nun die Bedingung $\overline{PF} = \overline{PA}$ vektoriell in der Form $\left|\overrightarrow{PF}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PA}\right|^2$ aus, und setzen Sie die Komponenten von $\overrightarrow{PF}$ und $\overrightarrow{PA}$ ein.

v) Vereinfachen Sie die in iv) erhaltene Gleichung.

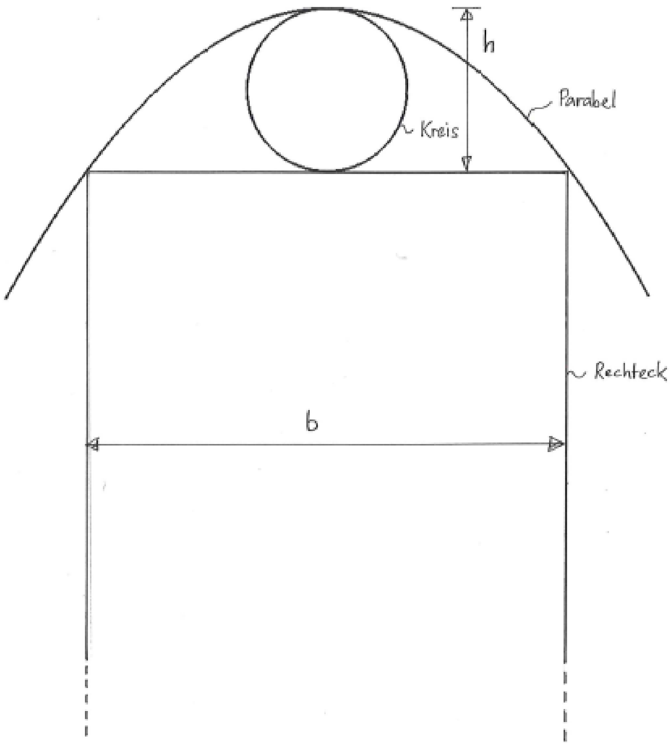
vi) Zeigen Sie, dass die Parabel als Graf einer quadratischen Funktion aufgefasst werden kann.

c) Bestimmen Sie analog zu b) die Gleichung der Parabel mit den folgenden Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt S hat die allgemeine Lage $S(x_0|y_0)$.
- Die Leitgerade *l* verläuft parallel zur x-Achse.

d) ** Zeigen Sie, dass die in c) hergeleitete Gleichung einer Parabel nicht auch die Glechung einer anderen Kurve in der x-y-Ebene sein kann, d.h. einer Kurve, die keine Parabel ist.

6.7 Ein Architekt gelangt mit der folgenden Problemstellung an Sie:

Ein Kirchenfenster soll aus einem Rechteck der Breite b und einem durch eine Parabel begrenzten Segment der Höhe h bestehen. Im aufgesetzten Segment soll ein Kreis so eingesetzt werden können, dass er das Rechteck und den Scheitelpunkt der Parabel berührt:



Bestimmen Sie, welche Bedingung(en) die Abmessungen b und h erfüllen müssen, damit ein solches Fenster realisierbar ist.

Ellipse, Hyperbel

6.8 * Bestimmen Sie die Gleichung ...

a) ... der Ellipse ...

b) ... der Hyperbel ...

... aus deren geometrischen Definition.

Lösungen

6.1 a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \binom{x}{y} - \binom{0}{0} = \binom{x}{y}$

$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = x^2 + y^2 = r^2$

b) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \binom{x}{y} - \binom{x_0}{y_0} = \binom{x - x_0}{y - y_0}$

$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

6.2 a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ d) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$

6.3 a) $(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$

b) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$

c) 2 mögliche Kreise
$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

d) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

6.4 a) $S_1(0|0)$, $S_2(1|1)$

b) $S_1(5|-2)$, $S_2\left(\frac{9}{5}\middle|-\frac{2}{5}\right)$

6.5 a) $M(-2|1)$, $r = 5$

b) $s = \sqrt{80}$

6.6 a) Da S ein Punkt der Parabel ist, gilt nach Definition der Parabel: $\overline{SF} = \overline{SA} = \frac{|p|}{2}$

b) i) $F\left(0\middle|\frac{p}{2}\right)$ ii) $A\left(x\middle|-\frac{p}{2}\right)$

iii) $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{p}{2} - y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p}{2} - y \end{pmatrix}$ iv) $(-x)^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = 0^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2$

v) $x^2 = 2py$ vi) $y = f(x) = \frac{1}{2p}x^2$ quadr. Fkt.

c) i) … ii) …

iii) … iv) …

v) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ vi) $y = f(x) = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2 + y_0$ quadr. Fkt.

d) ** ...

6.7 $b \geq 2h$

6.8 * a) …

b) ...