Aufgaben 2 Vektoren Skalarprodukt

Lernziele

- das Skalarprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Koordinaten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes anwenden können.
- das Skalarprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

2.1 Papula 1: 137/10, 137/11, 138/17, 138/20

Bemerkungen:
- "Papula 1" bedeutet: Lehrbuch Papula, Band 1 (ab 12. Auflage)
- "137/10" bedeutet: Seite 137, Aufgabe 10

2.2 Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge ein Rechteck bilden:

A(7|6|3) B(4|10|1) C(-2|6|2) D(1|2|4)

2.3 Bestimmen Sie den Wert von k, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal werden, d.h. senkrecht aufeinander stehen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2k \end{pmatrix}$

2.4 Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Wert von k, damit gilt:

$(\vec{a} + k\cdot \vec{b}) \perp \vec{c}$

2.5 Mit $\overrightarrow{AB}_{(CD)}$ sei derjenige Vektor bezeichnet, den man erhält, wenn man den Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht auf die Gerade (CD) projiziert.

Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}_{(CD)}$.

a) A(-7|-5), B(0|-4), C(10|1), D(-6|13) b) A(1|-2|3), B(5|-8|1), C(2|4|3), D(-1|9|1)

2.6 Bestimmen Sie die Koordinaten eines dreidimensionalen Vektors vom Betrag 20, welcher mit der x-Achse und mit der y-Achse je einen Winkel von 60° einschliesst.

2.7 Der Vektor $\vec{x}$ soll als Summe zweier Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ geschrieben werden.
$\vec{y}$ soll dabei parallel zu $\vec{a}$ sein, und $\vec{z}$ soll senkrecht zu $\vec{b}$ sein:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $\vec{y}$ und $\vec{z}$.

Lösungen

2.1 siehe Papula 1

2.2 ...

Hinweis:
- Drücken Sie die Bedingung, die die Punkte A bis D erfüllen sollen, durch vektorielle Gleichungen aus.

2.3 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

a) $k = -2$

b) $k = -1$

2.4 $(\vec{a} + k \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

$k = 1$

2.5 a) $\overrightarrow{AB}_{(CD)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}_{(CD)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.6 $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \sqrt{2} \cdot 10 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -\sqrt{2} \cdot 10 \end{pmatrix}$

Hinweis:
- Fassen Sie die erwähnten Winkel als Zwischenwinkel geeigneter Vektoren auf.

2.7 $\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$