

Zusatz-Aufgaben 6 Zinseszins- und Rentenrechnung Rentenrechnung

Lernziele

- den Anfangs- und den Endwert einer Rente berechnen können, falls konstante Zahlungen am Anfang oder am Ende jeder Zinsperiode getätigt werden.
- den Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endwert einer Rente auf Rentenprobleme anwenden können.
- ausgewählte Rentenprobleme bearbeiten können.

Aufgaben

- 6.1 Zwei Zwillinge sind 23 Jahre alt und besitzen verschiedene Anlagestrategien. Nehmen Sie an, dass der Zwilling 1 10 Jahre lang (bis er 33 Jahre alt ist) am Ende jedes Jahres CHF 2000 auf ein Konto einzahlt, welches jährlich zu 8% verzinst wird. Der Zwilling 2 hingegen wartet mit seiner Investition, bis er 40 Jahre alt ist. Wieviel muss der Zwilling 2 in den darauffolgenden 25 Jahren am Ende jedes Jahres auf ein Konto einzahlen, das jährlich zu 8% verzinst, so dass er am Ende dieser 25 Jahre (wenn beide 65 Jahre alt sind) den gleichen Betrag hat wie der Zwilling 1?
- 6.2 Gemäss eines Darlehensvertrages für Wohneigentum werden am Ende jedes Jahres CHF 3600 einbezahlt. Das Geld wird zu 3% verzinst. Nach 10 Jahren wird der doppelte angesparte Betrag ausgezahlt. Die Schulden, deren Zinsen 5% betragen, müssen innert weiterer 10 Jahren abgezahlt werden, und zwar in Raten, die jeweils am Jahresende fällig werden. Wie gross sind die jährlichen Raten (um die Schulden abzutragen)?
- 6.3 Ein Paar ist zum Schluss gekommen, dass es CHF 300'000 braucht, um eine Rente aufzubauen, wenn sie in 25 Jahren in Pension gehen. Wieviele Geld müssten sie am Ende jedes Monats auf ein Konto einzahlen, welches einen Zinssatz von 10% trägt und monatlich verzinst wird, damit sie in 25 Jahren CHF 300'000 haben?
- 6.4 Herr Müller plant, CHF 300 am Ende jedes Monats auf ein Konto einzuzahlen, welches bei 9% monatlich verzinst wird. Nach wievielen Monaten werden auf dem Konto CHF 50'000 liegen?
- 6.5 Ein Grosselternpaar plant, am Geburtstag ihres Grosskindes ein Konto zu eröffnen und jeden Monat einen Betrag einzuzahlen, bis es (das Grosskind) 18 Jahre alt ist. Wieviel müssen die Grosseltern zu Beginn jedes Monats einzahlen, damit der Kontostand am Ende der 18 Jahre CHF 180'000 beträgt, wenn die Anlage bei einem Jahreszinssatz von 12% monatlich verzinst wird?
- 6.6 Eine Versicherung im Wert von CHF 750'000 muss das Einkommen von Trixie Eden für die nächsten 40 Jahre ersetzen. Welches Einkommen generiert diese Summe am Ende jedes Monats, wenn das Geld als Rente investiert wird, welche zu einem Jahreszinssatz von 8.4% monatlich verzinst wird?
- 6.7 Juanita Domingo's Eltern wollen für ihre Ausbildung eine Renten-Anlage errichten. Sie möchten, dass ihre Tochter 16 vierteljährliche Rückzüge zu CHF 2000 tätigen kann, wobei die erste Auszahlung in 3 Monaten erfolgen soll. Wieviel müssen die Eltern jetzt einzahlen, wenn das Geld bei 7.2% vierteljährlich verzinst wird?

Lösungen

6.1 Zwilling 1: Nachschüssige Rente (von Alter 23 bis 33)

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{wobei } r = \text{CHF } 2000, q = 1 + 8\% = 1.08, n = 10$$

$$\Rightarrow R = \text{Kapital im Alter 33} = \text{CHF } 28'973.12$$

Zinseszins (von Alter 33 bis 65)

$$K_n = K q^n \quad \text{wobei } K = R, q = 1.08, n = 32$$

$$\Rightarrow K_{32} = \text{Kapital im Alter 65} = \text{CHF } 340'059.97$$

Zwilling 2: Nachschüssige Rente (von Alter 40 bis 65)

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r = \frac{R(q - 1)}{q^n - 1} \quad \text{wobei } R = K_{32} \text{ (Zwilling 1)} = \text{CHF } 340'059.97, q = 1.08, n = 25$$

$$\Rightarrow r = \text{CHF } 4651.61$$

6.2 2 nachschüssige Renten: Erste 10 Jahre (Geld sparen), zweite 10 Jahre (Schulden abzahlen)

- erste 10 Jahre (Geld sparen, d.h. Geld einzahlen)

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{wobei } r = \text{CHF } 3600, q = 1.03, n = 10$$

$$\Rightarrow R = \text{CHF } 41'270 \text{ (gerundet)}$$

- zweite 10 Jahre (Schulden abzahlen, d.h. Geld abheben)

$$K = \frac{r}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r = \frac{K q^n (q - 1)}{q^n - 1} \quad \text{wobei } K = \text{CHF } 41'270, q = 1.05, n = 10$$

$$\Rightarrow r = \text{CHF } 5345 \text{ (gerundet)}$$

6.3 Nachschüssige Rente

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r = \frac{R(q - 1)}{q^n - 1} \quad \text{wobei } R = \text{CHF } 300'000, q = 1 + \frac{10\%}{12}, n = 300 \text{ (25 Jahre = 300 Monate)}$$

$$\Rightarrow r = \text{CHF } 226.10$$

6.4 Nachschüssige Rente

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$n = \frac{\log_{10}\left(\frac{R(q - 1)}{r} + 1\right)}{\log_{10}(q)} \quad \text{wobei } R = \text{CHF } 50'000, r = \text{CHF } 300, q = 1 + \frac{9\%}{12}$$

$$\Rightarrow n = 108.52... \rightarrow 109 \text{ Monate} = 9 \text{ Jahre } 1 \text{ Monat}$$

6.5 (siehe nächste Seite)

6.5 Vorschüssige Rente

$$R = rq \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r = \frac{R(q - 1)}{q(q^n - 1)} \quad \text{wobei } R = \text{CHF } 180'000, q = 1 + \frac{12\%}{12}, n = 216 \text{ (18 Jahre = 216 Monate)}$$

$$\Rightarrow r = \text{CHF } 235.16$$

6.6 Nachschüssige Rente, Einkommen = Monatliche Auszahlung r

$$K = \frac{r q^n - 1}{q^n q - 1}$$

$$r = \frac{K q^n (q - 1)}{q^n - 1} \quad \text{wobei } K = \text{CHF } 750'000, q = 1 + \frac{8.4\%}{12}, n = 480 \text{ (40 Jahre = 480 Monate)}$$

$$\Rightarrow r = \text{CHF } 5441.23$$

6.7 Nachschüssige Rente

$$K = \frac{r q^n - 1}{q^n q - 1}$$

$$\text{wobei } r = \text{CHF } 2000, q = 1 + \frac{7.2\%}{4}, n = 16$$

$$\Rightarrow K = \text{CHF } 27'590.62$$