Repetitions-Aufgaben 3 Lineare Algebra

Aufgaben

R3.1 Gegeben ist die folgende Matrixgleichung mit den vier unbekannten Zahlen x, y, z und w:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2x \\ y & -y+z \\ x+w & w-2y+x \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 31 & 29 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie die Matrixmultiplikation aus, und schreiben Sie das erhaltene Gleichungssystem in der Matrixform

$$A \cdot X = B$$

$$\text{mit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens.

R3.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Matrix A regulär ist, und bestimmen Sie allenfalls die dazugehörige inverse Matrix A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

R3.3 Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen f_A und f_B:

$$f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$X \to Y = f_A(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix} \quad \text{mit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$X \to Y = f_B(X) = x + 2z \quad \text{mit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Abbildung f sei definiert als Zusammensetzung der beiden Abbildungen f_A und f_B:

$$f := f_B \circ f_A$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich, den Kobereich und die Abbildungsvorschrift von f an, d.h. stellen Sie f (wie die Abbildungen f_A und f_B am Anfang dieser Aufgabe) in der folgenden Form dar:

$$f: \ \ldots \to \ldots$$
$$X \to Y = f(X) = \ldots \qquad \text{mit } X = \ldots$$

Hinweis:
- Da Abbildungen Funktionen sind, funktioniert das Zusammensetzen von Abbildungen gleich wie das Zusammensetzen von Funktionen (siehe "Mathematik 1").

b) (siehe nächste Seite)

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix …

i) … A der Abbildung f_A.

ii) … B der Abbildung f_B.

iii) … C der Abbildung f.

Hinweis:
- Die Matrix C soll direkt aus der Abbildungsvorschrift von f gebildet werden und nicht etwa aus den Matrizen A und B.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix C das Matrixprodukt aus B und A ist, d.h. $C = B \cdot A$.

R3.4 Gegeben ist die lineare Abbildung f:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X \to Y = f(X) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} \quad \text{mit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildung f ist umkehrbar, d.h. es existiert die Umkehrabbildung f^{-1}:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$Y \to X = f^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \text{mit } Y = \dots$$

a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift der Umkehrabbildung f^{-1}an.

Hinweise:
- Bezeichnen Sie die beiden Komponenten von Y mit x' und y', d.h. $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- Die Abbildungsvorschrift von f besteht aus dem Gleichungssystem
  $x' = x + 2y$
  $y' = 2x + 3y$
- Um die Abbildungsvorschrift von f^{-1} zu bestimmen, muss dieses Gleichungssystem nach x und y gelöst werden.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix …

i) … A der Abbildung f.

ii) … B der Abbildung f^{-1}.

Hinweis:
- Die Matrix B soll direkt aus der Abbildungsvorschrift von f^{-1} gebildet werden und nicht etwa aus der Matrix A.

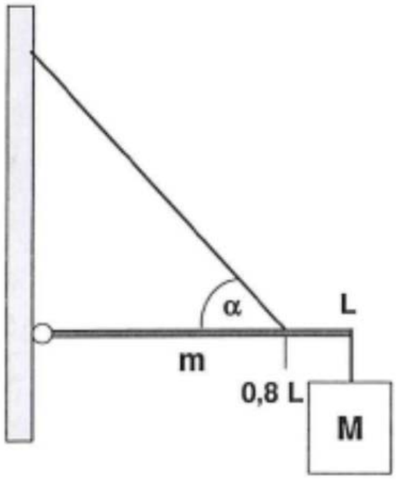
c) Zeigen Sie, dass die Matrix B die Inverse der Matrix A ist, d.h. $B = A^{-1}$.

R3.5 Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Projektion, bei welcher alle Punkte der xy-Ebene senkrecht auf die Gerade $y = \sqrt{3}\,x$ projiziert werden.

Hinweise:
- Es geht hier um ein zweidimensionales Problem. Die gesuchte Abbildungsmatrix ist daher eine 2x2-Matrix.
- Die Projektion auf eine Gerade in der Ebene kann - muss aber nicht - auf eine Projektion auf eine Ebene im Raum zurückgeführt werden.

R3.6 Jeder Punkt des Raumes wird senkrecht auf die Ebene E: $2x + 5y - z = 0$ projiziert.
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Projektion.

R3.7 Ein homogener Balken ist mit einem Schanier drehbar an einer senkrechten Wand fixiert. An seinem freien Ende wird er durch ein Gewichtsstück belastet. Ein Seil, das schräg vom Balken zur Wand gespannt ist, hält den Balken horizontal.



a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das das statische Gleichgewicht des Balkens beschreibt (vgl. im Unterricht behandeltes Beispiel bei der Einführung des Themas "Lineare Algebra").

Hinweise:
- Bekannte Grössen:
Betrag F_{GB} (= m·g) der Gewichtskraft $\vec{F}_{GB}$ des Balkens, Betrag F_{GG} (= M·g) der Gewichtskraft $\vec{F}_{GG}$ des Gewichtsstückes, Länge L des Balkens, Winkel α
- Unbekannte Grössen:
Beträge F_{Sx} und F_{Sy} der horizontalen bzw. vertikalen Komponente der Seilkraft $\vec{F}_S$, Betrag F_{Lx} und F_{Ly} der horizontalen bzw. vertikalen Komponente der Lagerkraft $\vec{F}_L$ im Scharnier

b) Schreiben Sie das in a) aufgestellte lineare Gleichungssystem in der Matrixdarstellung (vgl. Aufgabe 12.12).

c) Geben Sie die dazugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix an (vgl. Aufgabe 13.1 k) i)).

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens die reduzierte Stufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix (vgl. Aufgabe 13.1 k) ii)).

e) Geben Sie mit Hilfe des Resultates aus d) die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems an (vgl. Aufgabe 13.1 k) iii)).

Lösungen

R3.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & -1 \\ 12 & -8 & 11 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \\ 25 \\ 29 \end{pmatrix}$

b) (x, y, z, w) = (1, 2, 3, 4)

R3.2 Rg(A) = 3 < 4, A singulär, A^{-1} existiert nicht

R3.3 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$X \to Y = f(X) = 4x + 2y$ mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) …

R3.4 a) $X = f^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} -3x' + 2y' \\ 2x' - y' \end{pmatrix}$ mit $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

b) i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

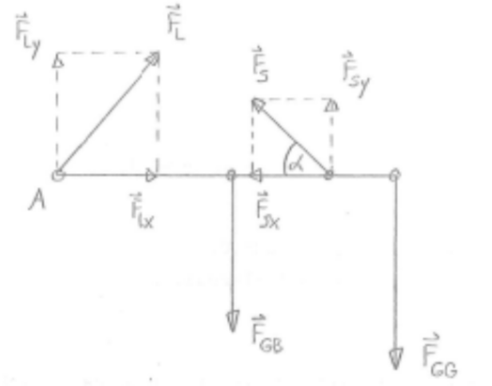
ii) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) …

R3.5 $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$

R3.6 $A = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 26 & -10 & 2 \\ -10 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 29 \end{pmatrix}$

R3.7 a)



$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ (x-Komponente) $F_{Lx} - F_{Sx} = 0$

$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ (y-Komponente) $F_{Ly} - F_{GB} + F_{Sy} - F_{GG} = 0$

$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$ (z-Komponente) bzgl. A $-\frac{1}{2}\,L\cdot F_{GB} + \frac{4}{5}\,L\cdot F_{Sy} - L\cdot F_{GG} = 0$

$F_{Sx} \leftrightarrow F_{Sy}$ $\tan(\alpha) = \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}}$

b) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \tan(\alpha) & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{Sx} \\ F_{Sy} \\ F_{Lx} \\ F_{Ly} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{GB} + F_{GG} \\ \frac{1}{2} F_{GB} + F_{GG} \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$A|c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & F_{GB} + F_{GG} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{2} F_{GB} + F_{GG} \\ \tan(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\mathrm{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8}\frac{1}{\tan(\alpha)}(F_{GB} + 2\,F_{GG}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8}(F_{GB} + 2\,F_{GG}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8}\frac{1}{\tan(\alpha)}(F_{GB} + 2\,F_{GG}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8}\left(3\,F_{GB} - 2\,F_{GG}\right) \end{pmatrix}$$

e) $$(F_{Sx}, F_{Sy}, F_{Lx}, F_{Ly}) = \left(\frac{5}{8}\frac{1}{\tan(\alpha)}(F_{GB} + 2\,F_{GG}),\ \frac{5}{8}(F_{GB} + 2\,F_{GG}),\ \frac{5}{8}\frac{1}{\tan(\alpha)}(F_{GB} + 2\,F_{GG}),\ \frac{1}{8}\left(3\,F_{GB} - 2\,F_{GG}\right)\right)$$