

Aufgaben 13 Lineare Abhängigkeit Gauss-Jordan-Verfahren, Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit

Lernziele

- aus einem linearen Gleichungssystem die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix herauslesen können.
- die reduzierte Stufenform einer Matrix mit dem Gauss-Jordan-Verfahren bestimmen können.
- aus der reduzierten Stufenform einer erweiterten Koeffizientenmatrix die Lösungen des dazugehörigen linearen Gleichungssystems bestimmen können.
- beurteilen können, ob sich ein gegebener Vektor als Linearkombination anderer gegebener Vektoren ausdrücken lässt.
- einen Vektor als Linearkombination anderer Vektoren ausdrücken können.
- beurteilen können, ob eine Menge gegebener Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig ist.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

13.1 Bearbeiten Sie für das gegebene lineare Gleichungssystem die folgenden Teilaufgaben:

- Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an.
 - Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens die reduzierte Stufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
 - Geben Sie mit Hilfe des Resultates aus ii) die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems an.
-
- $$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3 \\x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\3x_1 + 13x_2 + 4x_3 &= 30\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -6\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -1 \\-x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -13 \\4x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 10x_4 &= 0 \\x_2 + x_3 - x_4 &= -1\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 10 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 5 \\4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 20x_4 &= 5\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= 11 \\-5x_1 + x_2 &= -8 \\x_1 - 5x_2 &= 16\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= 11 \\-5x_1 + x_2 &= -8 \\x_1 - 4x_2 &= 16\end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 - 4x_2 &= -2 \\3x_1 - 6x_2 &= -3\end{aligned}$$

- i) $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
 $2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1$
- j) $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
 $2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2$
- k) Lineares Gleichungssystem aus der Aufgabe 12.12 (Statisches Gleichgewicht eines Balkens)

13.2 Zeigen Sie, dass sich jeder m-dimensionale Vektor \vec{a} als Linearkombination der folgenden m Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ ausdrücken lässt:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13.3 Beurteilen Sie, ob sich der Vektor \vec{a} als Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 ausdrücken lässt.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

13.4 Begründen Sie schlüssig, dass die folgenden Aussagen über die lineare Abhängigkeit von Vektoren wahr sind.

- a) Eine Menge von Vektoren, in welcher ein Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, ist linear abhängig.
- b) Eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.
- c) Eine Menge von Vektoren, welche eine linear abhängige Teilmenge von Vektoren enthält, ist linear abhängig.
- d) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.
- e) Jede Menge von mehr als m m-dimensionalen Vektoren ist linear abhängig.
- f) Die m m-dimensionalen Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ (siehe Aufgabe 13.2) sind linear unabhängig.
- g) Zwei oder mehr als zwei kollineare (d.h. parallel zur gleichen Gerade liegende) Vektoren sind linear abhängig.
- h) Drei oder mehr als drei komplanare (d.h. parallel zur gleichen Ebene liegende) Vektoren sind linear abhängig.

13.5 (siehe nächste Seite)

13.5 Papula 2: 157/13, 157/14, 157/15, 158/16, 158/17

Hinweise:

- Verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgaben 157/14 bis 158/17 den Satz zuunterst auf der Seite 1 des Theorie-Blattes "Lineare Abhängigkeit".
- Die Lösungswege zu den Aufgaben 157/14 bis 158/17 im Buch Papula 2 basieren auf den Begriffen "Determinante" und "Rang", die wir im Unterricht noch nicht behandelt haben.

13.6 Betrachten Sie den folgenden Satz über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren (vgl. Theorie-Blatt):

Satz: "Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur erfüllt werden kann mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0."$$

Dieser Satz verknüpft zwei Aussagen A und B: Er drückt aus, dass die beiden Aussagen äquivalent bzw. gleichwertig sind: $A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow B$ ("A ist äquivalent zu B.") bedeutet sowohl $A \Rightarrow B$ ("Aus A folgt B.") als auch $B \Rightarrow A$ ("Aus B folgt A."). Wenn A wahr ist, ist auch B wahr. Und wenn B wahr ist, ist auch A wahr.

In der Aussagenlogik wird dies so geschrieben: $(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
(Das Zeichen \wedge ist ein Symbol aus der Aussagenlogik und bedeutet "und".)

- Was für zwei Aussagen A und B sind gemeint?
Formulieren Sie die beiden Aussagen A und B, die der Satz verknüpft, separat.
- Formulieren Sie für die Aussagen A und B ...
 - ... die Folgerung $A \Rightarrow B$ in Worten.
 - ... die Folgerung $B \Rightarrow A$ in Worten.

Generell kann man aus der Folgerung $A \Rightarrow B$ ("Aus A folgt B.") die Folgerung $\neg B \Rightarrow \neg A$ ("Aus Nicht-A folgt Nicht-B.") schliessen. Wenn B nicht wahr ist, ist auch A nicht wahr.
(Das Zeichen \neg ist ein Symbol aus der Aussagenlogik und bedeutet "nicht".)

Analog kann man aus der Folgerung $B \Rightarrow A$ die Folgerung $\neg A \Rightarrow \neg B$ schliessen.

- Formulieren Sie für die Aussagen A und B ...
 - ... die Folgerung $\neg B \Rightarrow \neg A$ in Worten.
 - ... die Folgerung $\neg A \Rightarrow \neg B$ in Worten.

Da der vorliegende Satz aus den Folgerungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ besteht, ist er vollständig bewiesen, wenn gezeigt ist, dass die beiden Folgerungen $\neg B \Rightarrow \neg A$ und $\neg A \Rightarrow \neg B$ richtig sind.

- Zeigen Sie für den Satz, dass die nachstehenden Folgerungen richtig sind:
 - $\neg B \Rightarrow \neg A$
 - $\neg A \Rightarrow \neg B$

Lösungen

- 13.1 a) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 18 \\ 3 & 13 & 4 & 30 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 3, 0)$
 genau eine Lösung
- b) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2, x_3) = (1 + 2\lambda, 1, \lambda)$
 unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$)
- c) i) $A|c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- iii) keine Lösung
- d) i) $A|c = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, -2, 1, 0)$
 genau eine Lösung
- e) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & 5 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-2\lambda + 5\mu, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \mu\right)$
 unendlich viele Lösungen (2 freie Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)
- f) i) $A|c = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -5 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & 16 \end{pmatrix}$

- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2) = (1, -3)$
genau eine Lösung
- g) i) $A|c = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -5 & 1 & -8 \\ 1 & -4 & 16 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- iii) keine Lösung
- h) i) $A|c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2) = (-1 + 2\lambda, \lambda)$
unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$)
- i) i) $A|c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- iii) keine Lösung
- j) i) $A|c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(x_1, x_2, x_3) = (-1 + 2\lambda + \mu, \lambda, \mu)$
unendlich viele Lösungen (2 freie Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)
- k) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & F_{GB} \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & \frac{1}{2}\cos(\alpha) \cdot F_{GB} \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cos(\alpha) \cdot F_{GB} \end{pmatrix}$
- ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cot(\alpha) & \frac{1}{2}\cot(\alpha) \cdot F_{GB} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & F_{GB} \\ 0 & 0 & 1 & -\cot(\alpha) & \frac{1}{2}\cot(\alpha) \cdot F_{GB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- iii) $(F_{Ax}, F_{Ay}, F_s, F_{GL}) = \left(\cot(\alpha) \left(F_{GL} + \frac{1}{2}F_{GB} \right), F_{GL} + F_{GB}, \cot(\alpha) \left(F_{GL} + \frac{1}{2}F_{GB} \right), F_{GL} \right)$
unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $F_{GL} \in \mathbb{R}^+$)

13.2 ...

13.3 a) $\vec{a} = -2 \cdot \vec{a}_2$

- b) $\vec{a} = 2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_2$
c) \vec{a} kann nicht als Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 ausgedrückt werden.
d) $\vec{a} = -2 \cdot \vec{a}_1 + 3 \cdot \vec{a}_2$
- 13.4 a) ...
b) ...
c) ...
d) ...
e) ...
f) ...
- 13.5 157/13: siehe Papula 2
157/14: ...
157/15: ...
 $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$
158/16: ...
158/17: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$
- 13.6 a) Aussage A:
"Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ist linear unabhängig."
Aussage B:
"Die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ kann nur erfüllt werden mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$."
- b) i) "Wenn eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig ist, dann kann die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden."
ii) "Wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann, dann ist die Menge der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig."
- c) i) "Wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nicht nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann, dann ist die Menge der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear abhängig."
ii) "Wenn eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear abhängig ist, dann kann die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nicht nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden."
- d) i) ...
ii) ...