Aufgaben 9 Anwendungen der Integralrechnung Flächeninhalt, Menge/Änderung einer mengenartigen Grösse

Lernziele

- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der Abszisse mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf des Stromes einer mengenartigen Grösse die in einer bestimmten Zeitspanne geflossene Menge mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf der Änderungsrate einer mengenartigen Grösse die Änderung der Grösse in einer bestimmten Zeitspanne mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.

Aufgaben

9.1 Die Stärke des Volumenstromes in einem Rohr habe den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$I_V(t) = a \cdot t^2 \qquad \text{mit } a = 0.003\ m^3/s^3$$

Bestimmen Sie das Flüssigkeitsvolumen V_a, welches zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 10$ s und $t_2 = 20$ s durch das Rohr geflossen ist.

9.2 Die Stärke des elektrischen Ladungsstromes I_Q in einem Kupferdraht sinkt innert 5 Sekunden exponentiell von 2 A (Ampère) auf 1 A ab.

Bestimmen Sie die Ladungsmenge Q_a, welche in den 5 Sekunden durch den Draht geflossen ist.

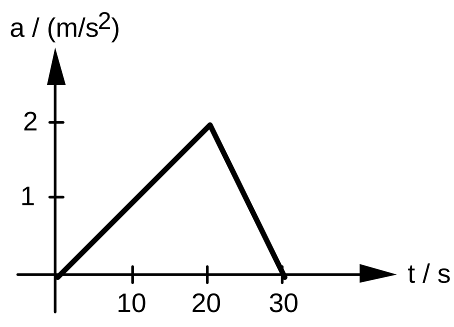
9.3 Papula 1: 565/4 (535/4) "Zu Abschnitt 10"

9.4 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden folgenden Kurven:

Kurve 1: $y = 8x^3 - 23x^2 + 3x$
Kurve 2: $y = 9x^2 - 21x$

9.5 Papula 1: 565/5 (535/5), 565/6 (535/6), 566/7 (535/7), 566/9 (535/9)

9.6 Ein am Anfang ruhendes Fahrzeug wird während 30 Sekunden beschleunigt. Die folgende Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung a:



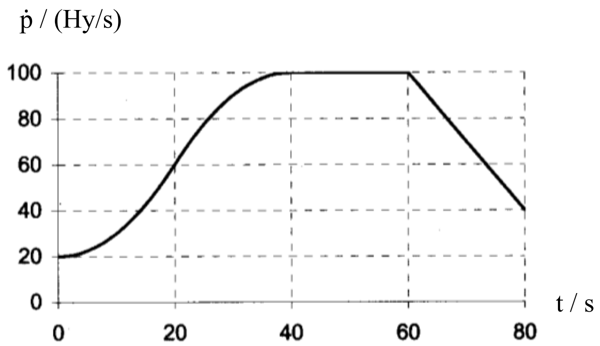
a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, welche das Fahrzeug nach den 30 Sekunden erreicht hat.

b) (siehe nächste Seite)

b) Fassen Sie die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t auf, also v: $t \rightarrow v = v(t)$.
Stellen Sie v sowohl analytisch (Funktionsgleichung) als auch grafisch (v-t-Diagramm) für die Zeitspanne $0s \leq t \leq 30s$ dar.

c) Bestimmen Sie die Strecke, die das Fahrzeug während den 30 Sekunden gefahren ist.

9.7 Ein schweres Motorrad der Masse 290 kg fährt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 36 km/h.
Die Änderungsrate des im Motorrad gespeicherten Impulses habe den folgenden zeitlichen Verlauf:



Die Kurven über den Intervallen [0s, 20s] und [20s, 40s] seien Parabelstücke 2. Ordnung.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Motorrades zum Zeitpunkt t = 80 s.

Hinweis:
- Die Funktionsgleichung der Funktion $\dot{p}$: $t \rightarrow \dot{p}(t)$ entspricht der Funktionsgleichung der Funktion V: $t \rightarrow V(t)$ in der Aufgabe 5.8

Lösungen

9.1 V_a = Fläche im I_V-t-Diagramm = $\int_{t_1}^{t_2} I_V(t)\,dt = \frac{a}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) = 7\ m^3$

9.2 Q_a = Fläche im I_Q-t-Diagramm = $\int_{0s}^{5s} I_Q(t)\,dt$

$I_Q(t) = I_{Q0} \cdot e^{-kt}$

$\Rightarrow\ Q_a = \frac{5}{\ln(2)}$ C (Coulomb) = 7.2 C

9.3 siehe Papula 1

9.4 $A = \frac{74}{3}$

9.5 siehe Papula 1

9.6 a) $v(30s) = v(0s) + \Delta v$

Δv = Fläche im a-t-Diagramm = $\int_{0s}^{30s} a(t)\,dt = 30\ m/s$

$\Rightarrow\ v(30s) = 0\ m/s + 30\ m/s = 30\ m/s$

b) $v(t) = v(0s) + \Delta v$

Δv = Fläche im a-t-Diagramm (im Intervall [0s,t]) = $\int_{0s}^{t} a(\tau)\,d\tau$

$$a(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\ m/s^3\right) t & (0s \le t \le 20s) \\ \left(-\frac{1}{5}\ m/s^3\right) t + 6\ m/s^2 & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ v(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20}\ m/s^3\right) t^2 & (0s \le t \le 20s) \\ \left(-\frac{1}{10}\ m/s^3\right) t^2 + (6\ m/s^2)\ t - 60\ m/s & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

c) Δs = Fläche im v-t-Diagramm = $\int_{0s}^{30s} v(t)\,dt = 400\ m$

9.7
$$\dot{p}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\ Hy/s^3\right) t^2 + 20\ Hy/s & (0s \le t \le 20s) \\ -\left(\frac{1}{10}\ Hy/s^3\right) t^2 + (8\ Hy/s^2)\ t - 60\ Hy/s & (20s \le t \le 40s) \\ 100\ Hy/s & (40s \le t \le 60s) \\ -(3\ Hy/s^2)\ t + 280\ Hy/s & (60s \le t \le 80s) \end{cases}$$

$v(80s) = v(0s) + \Delta v$

$\Delta p = m \cdot \Delta v$

Δp = Fläche im $\dot{p}$-t-Diagramm = $\int_{0s}^{80s} \dot{p}(t)\,dt$

$\Rightarrow\ \Delta p = 5800\ Hy$

$\Rightarrow\ v(80s) = 30\ m/s = 108\ km/h$