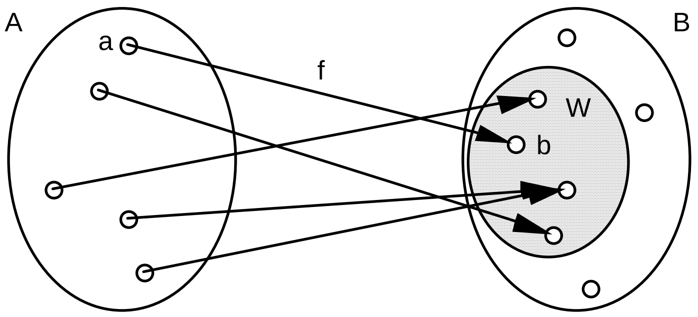
Funktion

Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element a aus einer Menge A **genau ein** Element b aus einer Menge B zuordnet.

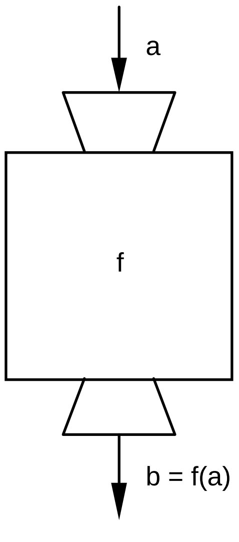


Durch die Funktion f wird die Menge A auf die Menge B **abgebildet**.

f: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = f(a)$ ("f von a")

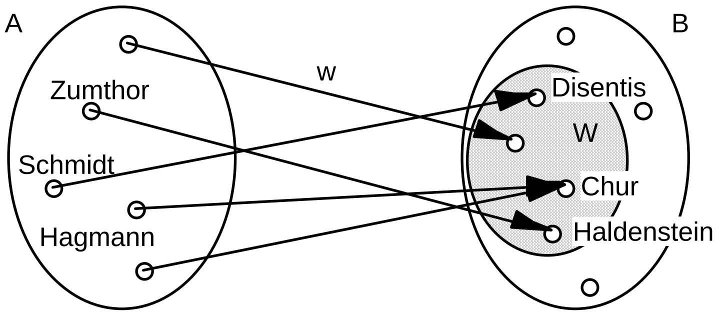
Die Menge A ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge B der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat), die Menge W der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion f.

b ist das zum Element a gehörige **Bildelement** (Funktionswert).



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \to B$
$a \to b = w(a)$ = Wohnort von a



2. A = Menge aller Eisenbahnbrücken im Kanton Graubünden
B = {1847, 1848, 1849, ..., 2010, 2011, 2012}

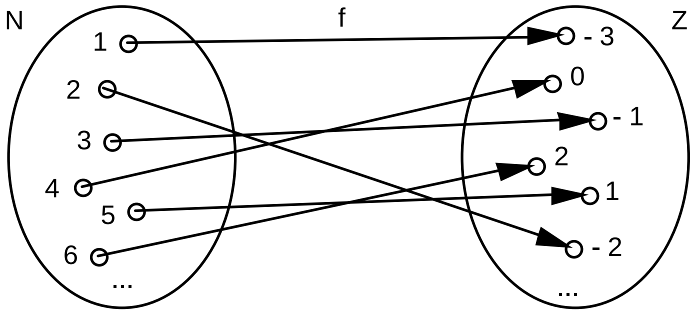
e: $A \to B$
$b \to j = e(b)$ = Jahr der Einweihung von b

3. A = B = Menge aller Punkte einer Ebene

S_g: $A \to A$
$P \to P' = S_g(P)$ = Bildpunkt von P bezüglich der Geradenspiegelung an der Geraden g

4. $A = \mathbb{N}$ (= Menge der natürlichen Zahlen)
$B = \mathbb{Z}$ (= Menge der ganzen Zahlen)

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$n \to y = f(n) = n - 4$



5. $A = \mathbb{R}_0^+$ (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)
$B = \mathbb{R}$ (= Menge der reellen Zahlen)

f: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$

6. $A = B = \mathbb{R}$

p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = p(x) = \frac{x^3 - 3}{2x^2 + 1}$

Darstellung einer Funktion

Pfeildiagramm

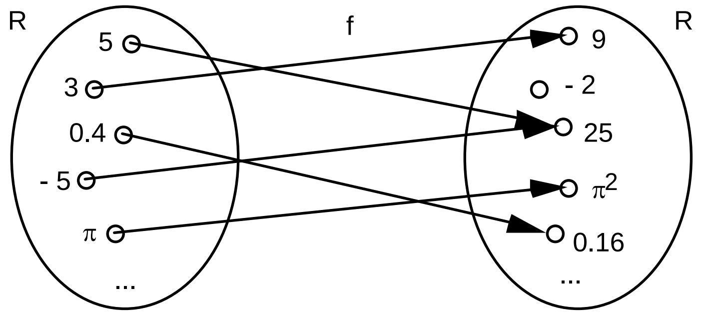


Tabelle (Wertetabelle)

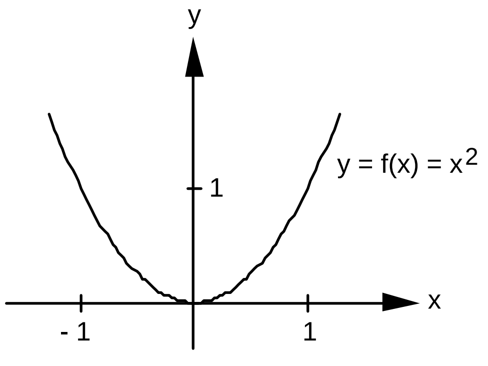
x	y
1	1
3	9
5	25
- 5	25
0.4	0.16
...	...

Funktionsvorschrift (Funktionsgleichung)

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = f(x) = x^2$

Graf



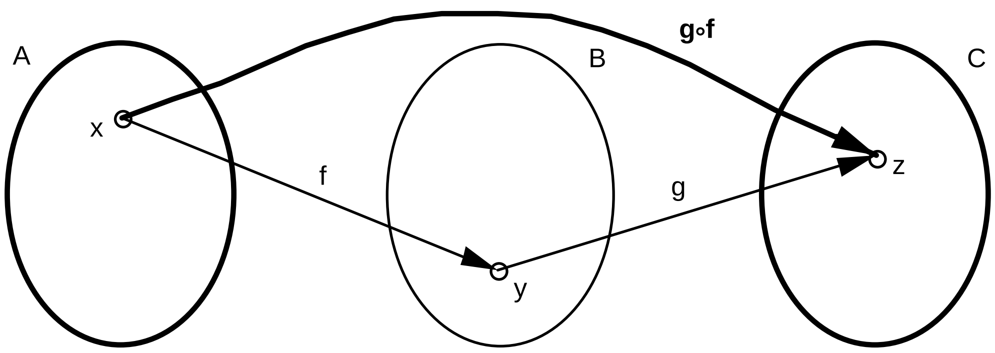
Zusammengesetzte Funktion

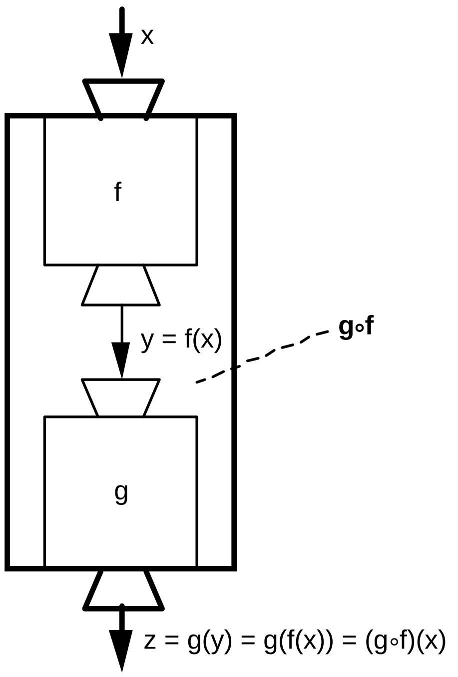
Gegeben seien zwei Funktionen f und g:

f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$ g: $B \to C$, $y \to z = g(y)$

Def.: Die **zusammengesetzte Funktion** $g \circ f$ ist definiert durch:

$g \circ f$: $A \to C$
$x \to z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$





Bsp.: f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, $x \to y = f(x) = \frac{x}{2}$ g: $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$, $y \to z = g(y) = \sqrt{y}$

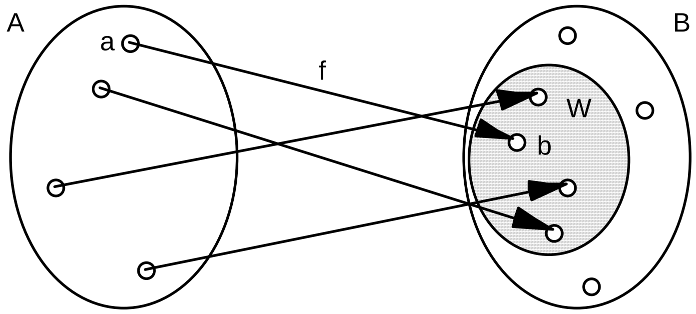
$g \circ f$: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

$x \to z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

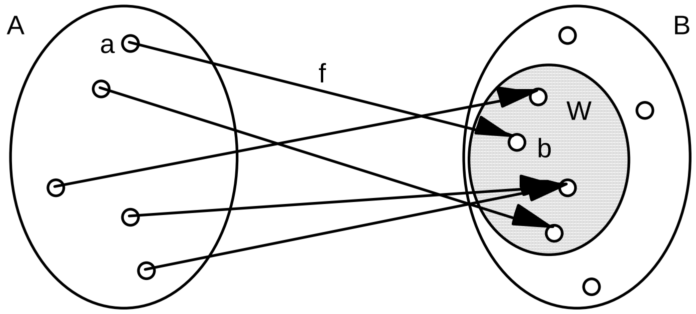
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Eine Funktion $f: A \to B$ heisst **injektiv**, falls jedes Element $b \in W$ Bildelement eines **einzigen** Elementes $a \in A$ ist.

Injektive Funktion

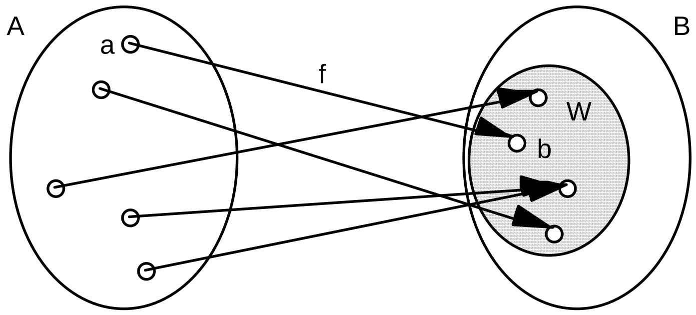


Nicht-injektive Funktion

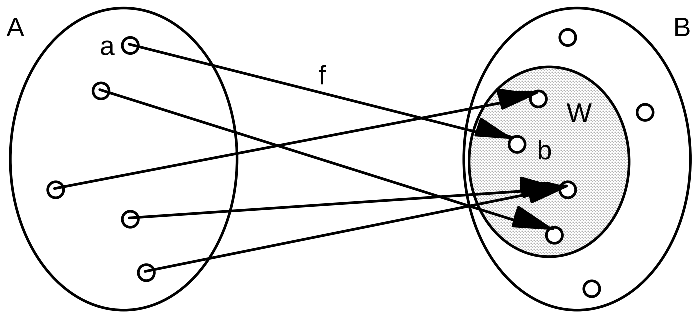


Def.: Eine Funktion $f: A \to B$ heisst **surjektiv**, falls **jedes** Element $b \in B$ als Bildelement auftritt, d.h. falls $W = B$.

Surjektive Funktion

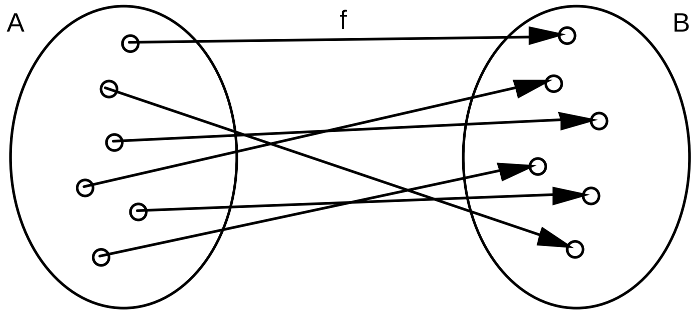


Nicht-surjektive Funktion



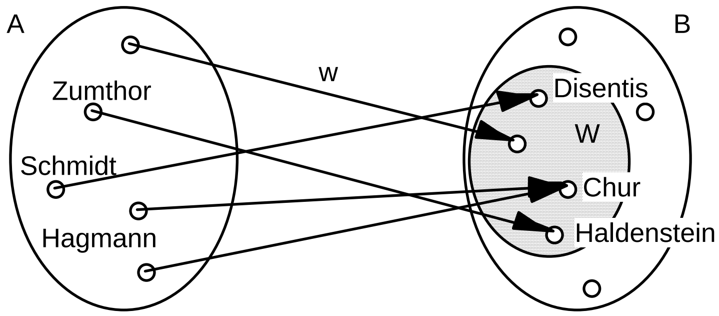
Def.: Eine Funktion f: $A \rightarrow B$ heisst **bijektiv**, falls sie **sowohl injektiv als auch surjektiv** ist.

Bijektive Funktion



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = w(a)$ = Wohnort von a



w nicht injektiv, w nicht surjektiv $\Rightarrow$ w nicht bijektiv

2. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = -x$

f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

3. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

f nicht injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

4. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

f injektiv, f nicht surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

5. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

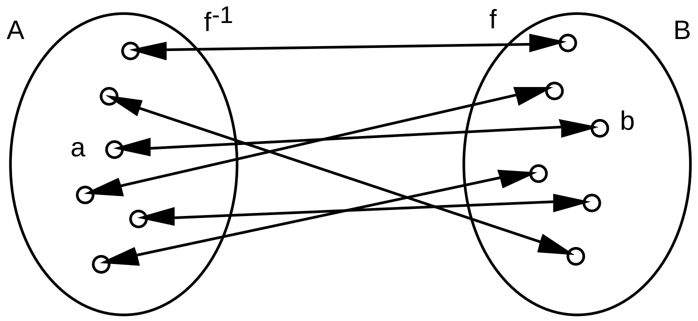
Umkehrfunktion

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

$$f: \quad A \to B, \quad a \to b = f(a)$$

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} ordnet jedem Element $b \in B$ dasjenige Element $a \in A$ zu, welches durch die Funktion f dem Element $b \in B$ zugeordnet wird.

$$f^{-1}: \quad B \to A, \quad b \to a = f^{-1}(b)$$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher
B = Menge aller Sitzplätze

$f: \quad A \to B$
$x \to y = f(x)$ = Sitzplatz von Kinobesucher x

$f^{-1}: \quad B \to A$
$y \to x = f^{-1}(y)$ = Kinobesucher auf Sitzplatz y

2. $A = \mathbb{Z}$
$B = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$f: \quad A \to B$
$x \to y = f(x) = 2x$

$f^{-1}: \quad B \to A$
$y \to x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$

3. $f: \quad \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \to y = f(x) = x^2$

$f^{-1}: \quad \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$y \to x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Def.: Die **identische Abbildung/Funktion** $\mathbb{1}$ ist definiert durch:

$\mathbb{1}: \quad A \to A$
$x \to y = \mathbb{1}(x) = x$

Bem.: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$