

Aufgaben 19 Reihen

Arithmetische/geometrische Reihe, Konvergenzkriterien

Lernziele

- die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe bestimmen können.
- die Summe einer endlichen geometrischen Reihe bestimmen können.
- wissen und verstehen, unter welcher Bedingung eine unendliche geometrische Reihe konvergent ist.
- beurteilen können, ob eine unendliche geometrische Reihe konvergent ist oder nicht.
- die Summe einer unendlichen konvergenten geometrischen Reihe bestimmen können.

Aufgaben

19.1 Berechnen Sie die folgenden Summen:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$
- b) $250 + 244 + 238 + \dots + 16$
- c) $6 + 15 + 24 + \dots + 177$
- d) $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 1536$

19.2 Wieviele Glieder der ...

- a) ... arithmetischen Folge 6, 12, 18, ... muss man nehmen, damit ihre Summe grösser als 1000 ist?
- b) ... geometrischen Folge 6, 12, 24, ... muss man nehmen, damit ihre Summe grösser als 10'000 ist?

19.3 Wie gross ist die Summe aller ...

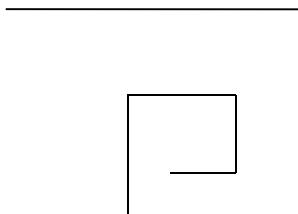
- a) ... durch 5 teilbaren dreistelligen Zahlen?
- b) ... Potenzen von 2 (mit natürlichem Exponenten), die kleiner als 1000 sind?

19.4 Wie lange ist die in der Aufgabe 18.5 b) betrachtete Säulenhalle?

Hinweis:

- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

19.5 Eine Spirale bestehe aus zehn rechtwinklig aneinandergereihten Geradenstücken. Das erste Geradenstück sei genau einen Meter lang. In der folgenden Grafik sind die ersten sieben Geradenstücke gezeichnet:



Bestimmen Sie die Länge der Spirale, wenn jedes Geradenstück ...

- a) ... halb so lange ist wie das vorhergehende.
- b) ... 99% so lange ist wie das vorhergehende.

Hinweis:

- Für die Bestimmung der numerischen Endresultate können Sie einen Taschenrechner verwenden.

19.6 Berechnen Sie die Summe der folgenden geometrischen Reihen:

a) $2 + \frac{2}{3} + \dots$

b) $2 - \frac{2}{3} + \dots$

c) $1 + 0.01 + \dots$

d) $1 - 0.99 + \dots$

19.7 Betrachten Sie noch einmal die Spirale aus der Aufgabe 19.5

Bestimmen Sie für beide Fälle a) und b) die Länge der Spirale, wenn die Anzahl Geradenstücke unendlich gross ist.

19.8 Betrachten Sie die folgende Reihe:

$$1 - \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \dots$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von x , für welche die Reihe konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Summe der Reihe für den Fall, dass die Reihe konvergiert.

19.9 Studieren Sie in Papula 1 auf den Seiten 578 bis 583 (Seiten 546 bis 550, Wurzelkriterium fehlt) die Beispiele zu den Konvergenzkriterien.

19.10 Papula 1: 633/1 (596/1), 633/2 (596/2), 633/3 (-), 633/4 (-), 633/5 (-), 634/6 (596/3), 634/7 (-)

Lösungen

- 19.1 a) $s_n = 5050$
b) $s_n = 5320$
c) $s_n = 1830$
d) $s_n = 3069$

- 19.2 a) $n = 18$
b) $n = 11$

- 19.3 a) $s_n = 98'550$
b) $s_n = 1022$

19.4 $l = 24.58 \text{ m}$

19.5 a) $l = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right) \text{ m} = \frac{1023}{512} \text{ m} = 1.998... \text{ m}$

b) $l = 100 \left(1 - \left(\frac{99}{100} \right)^{10} \right) \text{ m} = 9.561... \text{ m}$

- 19.6 a) $s = 3$
b) $s = \frac{3}{2}$
c) $s = \frac{100}{99}$
d) $s = \frac{100}{199}$

- 19.7 a) $l = 2 \text{ m}$
b) $l = 100 \text{ m}$

- 19.8 a) $x < \frac{1}{2}$
b) $s = 1 - x$

19.9 ...

19.10 siehe Papula 1