

## Aufgaben 7      **Funktion** **Grundbegriffe, Zusammengesetzte Funktion**

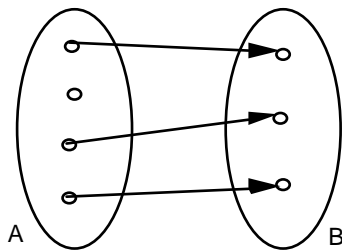
### Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- aus dem Grafen einer gegebenen Funktion den Definitionsbereich der Funktion herauslesen können.
- zwei gegebene Funktionen zu einer einzigen Funktion zusammensetzen können.
- eine gegebene Funktion als Zusammensetzung zweier oder mehrerer Funktionen darstellen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

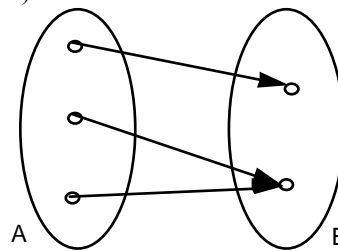
### Aufgaben

7.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion  $A \rightarrow B$  ist:

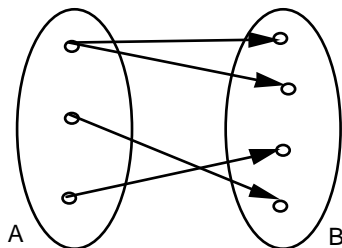
a)



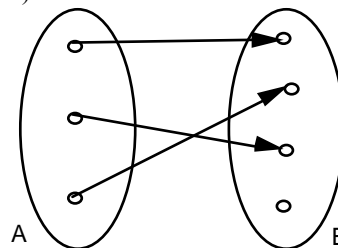
b)



c)



d)



- e)  $A =$  Menge aller Häuser,  $B =$  Menge aller Architekten/-innen  
 $f: A \rightarrow B, h \rightarrow a = f(h) =$  Architekt/-in von  $h$
- f)  $A =$  Menge aller Vereine in der Schweiz,  $B =$  Menge aller Schweizer/-innen  
 $p: A \rightarrow B, x \rightarrow y = p(x) =$  Präsident/-in von  $x$
- g)  $A = \{1982, 1983, \dots, 1991, 1992\}$   
 $B =$  Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen  
 $f: A \rightarrow B, j \rightarrow m = f(j) =$  Mensch mit Jahrgang  $j$
- h)  $A =$  Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen  
 $B = \{1982, 1983, \dots, 1991, 1992\}$   
 $j: A \rightarrow B, m \rightarrow j = j(m) =$  Jahrgang von Mensch  $m$
- i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^2$
- j)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) =$  Zahl, welche quadriert gleich  $x$  ergibt
- k)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \rightarrow y = f(x) =$  Ganzzahliger Teiler von  $x$

7.2 Gegeben sind die Mengen A und B.

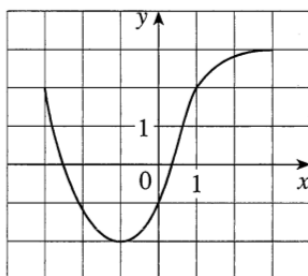
Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion  $A \rightarrow B$ .

- i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
  - ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
  - iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.
- a)  $A =$  Menge aller Tage des Jahres 2012  
 $B = \mathbb{R}$
  - b)  $A =$  Menge aller Schweizer Firmen  
 $B =$  Menge aller Schweizer Kantone
  - c)  $A =$  Menge aller Vierecke  
 $B =$  Menge aller Dreiecke
  - d)  $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$   
 $B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$
  - e)  $A = \mathbb{R}^-$   
 $B = \mathbb{R}^+$

7.3 Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

- a)  $A = \{\text{Januar, Februar, März, ..., Dezember}\}$   
 $B = \{A, B, C, ..., Z\}$   
 $f: A \rightarrow B, m \rightarrow b = f(m) =$  Anfangsbuchstabe des Monats m
- b)  $A =$  Menge aller Nachbarländer der Schweiz  
 $B =$  Menge aller europäischen Städte  
 $h: A \rightarrow B, n \rightarrow s = h(n) =$  Hauptstadt des Nachbarlandes n
- c)  $A = \mathbb{R}$   
 $B = \mathbb{R}_0^+$   
 $b: A \rightarrow B, x \rightarrow y = b(x) = |x|$
- d) Funktion f aus Aufgabe 7.1 h)
- e) Funktion f aus Aufgabe 7.1 i)

7.4 Gegeben ist der vollständige Graf einer Funktion f:



- a) Geben Sie den Funktionswert  $f(-1)$  an.
- b) Schätzen Sie den Funktionswert  $f(2)$  ab.
- c) Geben Sie die Werte von x an, für welche  $f(x) = 2$  gilt.
- d) Schätzen Sie die Werte von x ab, für welche  $f(x) = 0$  gilt.
- e) Geben Sie den Definitionsbereich D von f an.
- f) Geben Sie den Bildbereich W von f an.

7.5 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- |     |          |     |            |      |              |
|-----|----------|-----|------------|------|--------------|
| i)  | $f(1)$   | ii) | $f(-2)$    | iii) | $f(a)$       |
| iv) | $f(b^2)$ | v)  | $f(a - b)$ | vi)  | $f(x^3 - x)$ |

b)  $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- |     |          |     |            |      |                                 |
|-----|----------|-----|------------|------|---------------------------------|
| i)  | $g(2)$   | ii) | $g(-3)$    | iii) | $g(a)$                          |
| iv) | $g(b^2)$ | v)  | $g(a - b)$ | vi)  | $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ |

7.6 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion  $h = g \circ f$

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^2$   
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = -2y$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$   
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = \frac{y}{y^2 + 1}$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \rightarrow y = f(x) = \frac{2}{x+1}$   
 $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$   
 $g = f$

e)  $A =$  Menge aller Studierenden der HTW Chur  
 $B =$  Menge aller Länder der Erde  
 $C = \mathbb{N}$  (= Menge aller natürlichen Zahlen)  
 $f: A \rightarrow B, s \rightarrow l = f(s) =$  Herkunftsland des Studierenden  $s$   
 $g: B \rightarrow C, l \rightarrow e = g(l) =$  Einwohnerzahl des Landes  $l$

7.7 Gegeben ist die Funktion h.

Bestimmen Sie zwei Funktionen f und g, aus welchen sich die Funktion h zusammensetzt, d.h.  $h = g \circ f$ .

a)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = e^{-2x}$

b)  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = (x-1) \cdot \sin(2x)$

c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = x$

d)  $A =$  Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden  
 $C =$  Menge aller Tage eines Jahres

$h: A \rightarrow C, t \rightarrow d = h(t) =$  Osterdatum im Einweihungsjahr des Autobahntunnels  $t$

7.8 Gegeben ist die folgende Funktion f:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = 3 \sin^2(4x - 3)$

Um aus  $x$  den Funktionswert  $y = f(x)$  zu berechnen, werden nacheinander fünf einzelne Operationen ausgeführt. Daher kann man  $f$  auffassen als Funktion, die sich aus fünf Funktionen  $f_1$  bis  $f_5$  zusammensetzt, d.h.  $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ .

Bestimmen Sie die fünf Funktionen  $f_1$  bis  $f_5$ .

7.9 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt:  $g \circ f = f \circ g$

Hinweis:

- Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 7.6 und 7.7.

### Lösungen

- 7.1
- a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle  $a \in A$ )
  - b) Funktion
  - c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)
  - d) Funktion
  - e) keine Funktion ( $f$  nicht oder nicht eindeutig definiert für alle  $h \in A$ )
  - f) keine Funktion ( $p$  nicht definiert für alle  $x \in A$ )
  - g) keine Funktion ( $f$  nicht eindeutig)
  - h) Funktion
  - i) Funktion
  - j) keine Funktion ( $f$  nicht eindeutig)
  - k) keine Funktion ( $f$  nicht eindeutig)
- 7.2
- a)
    - i)  $m: A \rightarrow B, d \rightarrow T = m(d) = \text{Maximaltemperatur in Chur am Tag } d$
    - ii) ...
    - iii) ...
  - b)
    - i)  $s: A \rightarrow B, f \rightarrow k = s(f) = \text{Kanton, an welchen } f \text{ die meisten Steuern zahlen muss}$
    - ii) ...
    - iii) ...
  - c)
    - i)  $f: A \rightarrow B, v \rightarrow d = f(v) = \text{gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie } v$
    - ii) ...
    - iii) ...
  - d)
    - i)  $f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = 2x$
    - ii) ...
    - iii) ...
  - e)
    - i)  $f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = -x$
    - ii) ...
    - iii) ...
- 7.3
- a)  $W = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$
  - b)  $W = \{\text{Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}\}$
  - c)  $W = B$
  - d)  $W = B$
  - e)  $W = \mathbb{R}_0^+$
- 7.4
- a)  $f(-1) = -2$
  - b)  $f(2) \approx 2.8$
  - c)  $x_1 = -3, x_2 = 1$
  - d)  $x_1 \approx -2.5, x_2 \approx 0.3$
  - e)  $D = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$
  - f)  $W = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq y \leq 3\} = [-2, 3]$

7.5 a) i)  $f(1) = 1^3 - 1 = 0$   
 ii)  $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$   
 iii)  $f(a) = a^3 - a$   
 iv)  $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$   
 v)  $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$   
 vi)  $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

b) i)  $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$   
 ii)  $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$   
 iii)  $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$   
 iv)  $g(b^2) = \frac{(b^2)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$   
 v)  $g(a - b) = \frac{(a-b)^2}{(a-b)+1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$   
 vi)  $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

7.6 a)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2x^2$   
 b)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+1}$   
 c)  $h: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$   
 d)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow z = h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^2}$   
 e)  $h: A \rightarrow C, s \rightarrow e = h(s) = (g \circ f)(s) = g(f(s)) = \text{Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden } s$

7.7 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = -2x$   
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = e^y$   
 b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \rightarrow y = f(x) = x-1$   
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = y \cdot \sin(2(y+1))$   
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = 2x$   
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow z = g(y) = \frac{y}{2}$   
 d)  $B = \text{Menge aller Jahre von 1900 bis heute}$   
 $f: A \rightarrow B, t \rightarrow j = f(t) = \text{Einweihungsjahr des Autobahntunnels } t$   
 $g: B \rightarrow C, j \rightarrow d = g(j) = \text{Osterdatum im Jahr } j$

7.8  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_1(x) = 4x$   
 $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_2(x) = x - 3$   
 $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_3(x) = \sin(x)$   
 $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_4(x) = x^2$   
 $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_5(x) = 3x$

7.9 ...