# Aufgaben 3 Vektoren
# Vektorprodukt, Spatprodukt

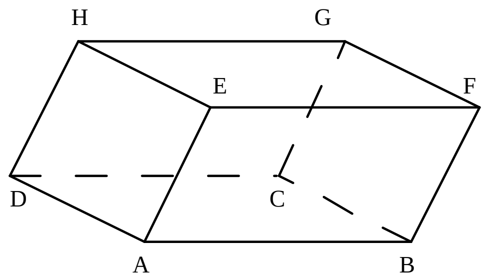
**Lernziele**

- das Vektorprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Vektorproduktes anwenden können.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- das Spatprodukt dreier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- ein Spatprodukt mit Hilfe einer dreireihigen Determinante berechnen können.
- die Rechenregeln für das Spatprodukt anwenden können.
- das Spatprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

**Aufgaben**

3.1 Papula 1: 139/23 (131/23), 139/24 (131/24)

3.2 Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$:




$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -36 \end{pmatrix}$

Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird.

3.3 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Überlegen Sie sich, wie viele Einheitsvektoren es gibt, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht stehen.

b) Bestimmen Sie diese Einheitsvektoren.

3.4 Eine Pyramide besitze die vier folgenden Eckpunkte:

A(2|4|-7) B(3|4|-9) C(-1|-5|5) D(8|4|8)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der senkrecht zur Ebene ABC stehenden und über D hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von D den Abstand 7 hat.

Hinweis:
- Es soll hier keine Konvention zum Umlaufsinn der Pyramidenflächen zu Grunde liegen.

3.5 Papula 1: 139/26 (132/26), 140/27 (132/27), 140/28 (132/28), 140/29 (132/29)

**Lösungen**

3.1 siehe Papula 1

3.2 $A_{\Delta BDG} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{608} = 12.3...$

3.3 a) 2 Einheitsvektoren

b) $\vec{x} = k\cdot(\vec{a} \times \vec{b})$
$|\vec{x}| = 1$
---------------
$\Rightarrow\ \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$

3.4 $\overrightarrow{DP}$ steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und hat Betrag 7

$\overrightarrow{DP} = k\cdot\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$
$\left|\overrightarrow{DP}\right| = 7$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}$
----------------------
$\Rightarrow\ \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}14\\6\\11\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ P(14|6|11)$

3.5 siehe Papula 1