

Aufgaben 9 Anwendungen der Integralrechnung Flächeninhalt, Menge/Änderung einer mengenartigen Grösse

Lernziele

- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der Abszisse mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf des Stromes einer mengenartigen Grösse die in einer bestimmten Zeitspanne geflossene Menge mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf der Änderungsrate einer mengenartigen Grösse die Änderung der Grösse in einer bestimmten Zeitspanne mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.

Aufgaben

- 9.1 Die Stärke des Volumenstromes in einem Rohr habe den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$I_V(t) = a \cdot t^2 \quad \text{mit } a = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}^3$$

Bestimmen Sie das Flüssigkeitsvolumen V_a , welches zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 10 \text{ s}$ und $t_2 = 20 \text{ s}$ durch das Rohr geflossen ist.

- 9.2 Die Stärke des elektrischen Ladungsstromes I_Q in einem Kupferdraht sinkt innert 5 Sekunden exponentiell von 2 A (Ampère) auf 1 A ab.

Bestimmen Sie die Ladungsmenge Q_a , welche in den 5 Sekunden durch den Draht geflossen ist.

- 9.3 Papula 1: 565/4 (535/4)

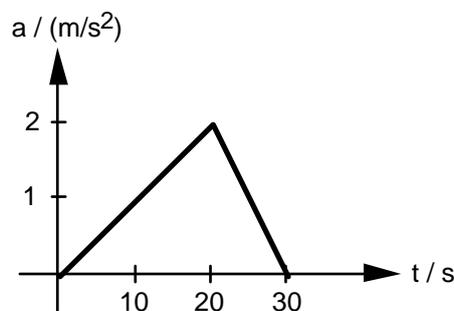
- 9.4 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden folgenden Kurven:

$$\text{Kurve 1: } y = 8x^3 - 23x^2 + 3x$$

$$\text{Kurve 2: } y = 9x^2 - 21x$$

- 9.5 Papula 1: 565/5 (535/5), 565/6 (535/6), 566/7 (535/7), 566/9 (535/9)

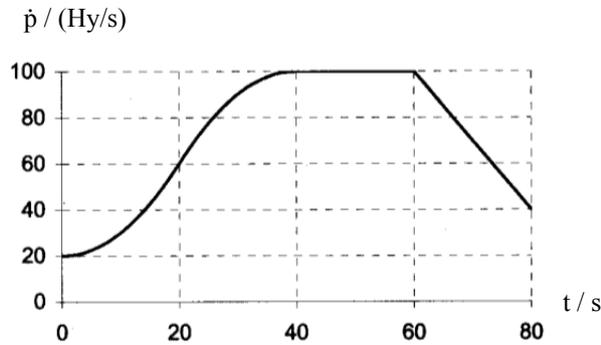
- 9.6 Ein am Anfang ruhendes Fahrzeug wird während 30 Sekunden beschleunigt. Die folgende Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung a :



- a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, welche das Fahrzeug nach den 30 Sekunden erreicht hat.
b) (siehe nächste Seite)

- b) Fassen Sie die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t auf, also $v: t \rightarrow v = v(t)$.
Stellen Sie v sowohl analytisch (Funktionsgleichung) als auch grafisch (v - t -Diagramm) für die Zeitspanne $0s \leq t \leq 30s$ dar.
- c) Bestimmen Sie die Strecke, die das Fahrzeug während den 30 Sekunden gefahren ist.

9.7 Ein schweres Motorrad der Masse 290 kg fährt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 36 km/h. Die Änderungsrate des im Motorrad gespeicherten Impulses habe den folgenden zeitlichen Verlauf:



Die Kurven über den Intervallen $[0s, 20s]$ und $[20s, 40s]$ seien Parabelstücke 2. Ordnung.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Motorrads zum Zeitpunkt $t = 80$ s.

Hinweis:

- Die Funktionsgleichung der Funktion $\dot{p}: t \rightarrow \dot{p}(t)$ entspricht der Funktionsgleichung der Funktion $V: t \rightarrow V(t)$ in der Aufgabe 5.8

Lösungen

9.1 $V_a = \text{Fläche im } I_V\text{-t-Diagramm} = \int_{t_1}^{t_2} I_V(t) dt = \frac{a}{3} (t_2^3 - t_1^3) = 7 \text{ m}^3$

9.2 $Q_a = \text{Fläche im } I_Q\text{-t-Diagramm} = \int_{0s}^{5s} I_Q(t) dt$
 $I_Q(t) = I_{Q0} \cdot e^{-kt}$
 $\Rightarrow Q_a = \frac{5}{\ln(2)} \text{ C (Coulomb)} = 7.2 \text{ C}$

9.3 siehe Papula 1

9.4 $A = \frac{74}{3}$

9.5 siehe Papula 1

9.6 a) $v(30s) = v(0s) + \Delta v$
 $\Delta v = \text{Fläche im } a\text{-t-Diagramm} = \int_{0s}^{30s} a(t) dt = 30 \text{ m/s}$
 $\Rightarrow v(30s) = 0 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s} = 30 \text{ m/s}$

b) $v(t) = v(0s) + \Delta v$
 $\Delta v = \text{Fläche im } a\text{-t-Diagramm (im Intervall } [0s,t]) = \int_0^t a(\tau) d\tau$
 $a(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10} \text{ m/s}^3\right) t & (0s \leq t \leq 20s) \\ \left(-\frac{1}{5} \text{ m/s}^3\right) t + 6 \text{ m/s}^2 & (20s \leq t \leq 30s) \end{cases}$
 $\Rightarrow v(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20} \text{ m/s}^3\right) t^2 & (0s \leq t \leq 20s) \\ \left(-\frac{1}{10} \text{ m/s}^3\right) t^2 + (6 \text{ m/s}^2) t - 60 \text{ m/s} & (20s \leq t \leq 30s) \end{cases}$

c) $\Delta s = \text{Fläche im } v\text{-t-Diagramm} = \int_{0s}^{30s} v(t) dt = 400 \text{ m}$

9.7 $\dot{p}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10} \text{ Hy/s}^3\right) t^2 + 20 \text{ Hy/s} & (0s \leq t \leq 20s) \\ -\left(\frac{1}{10} \text{ Hy/s}^3\right) t^2 + (8 \text{ Hy/s}^2) t - 60 \text{ Hy/s} & (20s \leq t \leq 40s) \\ 100 \text{ Hy/s} & (40s \leq t \leq 60s) \\ -(3 \text{ Hy/s}^2) t + 280 \text{ Hy/s} & (60s \leq t \leq 80s) \end{cases}$

$v(80s) = v(0s) + \Delta v$

$\Delta p = m \cdot \Delta v$

$\Delta p = \text{Fläche im } \dot{p}\text{-t-Diagramm} = \int_{0s}^{80s} \dot{p}(t) dt$

 $\Rightarrow \Delta p = 5800 \text{ Hy}$

$\Rightarrow v(80s) = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$