

Ganzrationale Funktion (Polynomfunktion)

Definition

Def.: Eine Funktion f der Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

ist eine **ganzrationale Funktion** oder **Polynomfunktion** vom **Grad n** .

Bsp.:	$f(x) = 4$	Grad $n = 0$	Konstante Funktion
	$f(x) = 2x - 3$	Grad $n = 1$	Lineare Funktion
	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$	Grad $n = 2$	Quadratische Funktion
	$f(x) = x^3 - x$	Grad $n = 3$	Kubische Funktion
	$f(x) = 4x^8 - x^5 + 3x$	Grad $n = 8$	

Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

Satz: Ist x_1 eine Nullstelle der Polynomfunktion f vom Grad n ($n > 0$), so kann das Polynom $f(x)$ als Produkt des Linearfaktors $(x - x_1)$ und eines Polynoms $g(x)$ dargestellt werden, wobei die Polynomfunktion g vom Grad $n-1$ ist:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$$

Bew.: $x = x_1$

$$f(x_1) = 0, \text{ da } x_1 \text{ Nullstelle von } f$$

$$(x_1 - x_1) \cdot g(x_1) = 0 \cdot g(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot g(x_1)$$

$$x \neq x_1$$

Bsp.: $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

f vom Grad 2

$$\text{Polynomdivision: } \frac{f(x)}{x - x_1} = (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0) : (x - x_1) = a_2 \cdot x + (a_1 + a_2 \cdot x_1) =: g(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1) \cdot g(x), g \text{ vom Grad 1}$$

allg.: ...

Bsp.: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

f ist eine Polynomfunktion vom Grad 3, $x_1 = 2$ ist eine Nullstelle von f

$$\text{Polynomdivision: } \frac{f(x)}{x - 2} = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2) : (x - 2) = x^2 - x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - x + 1), g \text{ mit } g(x) = x^2 - x + 1 \text{ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2}$$

Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Eine Polynomfunktion vom Grad n ($n > 0$) hat höchstens n reelle Nullstellen.

Def.: Die Zahl x_1 ist eine **m-fache Nullstelle** der Polynomfunktion f vom Grad n ($m \leq n$), falls $f(x)$ dargestellt werden kann als

$$f(x) = (x - x_1)^m \cdot g(x)$$

wobei die Polynomfunktion g vom Grad $n - m$ ist.

Def.: $x_1, x_2, \dots, x_N$ seien alle N reellen Nullstellen der Polynomfunktion f , und g sei eine Polynomfunktion ohne reelle Nullstellen. Die Darstellung

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - x_N)^{m_N} \cdot g(x)$$

heisst **Produktform** oder **Linearfaktorzerlegung** des Polynoms $f(x)$.

Satz: Hat eine Polynomfunktion vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle x_1 , so ist x_1 ein ganzzahliger Teiler des konstanten Gliedes a_0 .

Bew.: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

$$f(x_1) = 0 = a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 + a_0$$

$$a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 = -a_0$$

$$x_1 \cdot (a_n \cdot x_1^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_1^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

Die beiden Faktoren links sind ganze Zahlen. Ebenso ist a_0 eine ganze Zahl.

$\Rightarrow$ Beide Faktoren links, also insbesondere x_1 , sind ganzzahlige Teiler von a_0 .

Bsp.: $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$

Auffinden einer ersten Nullstelle x_1

$a_0 = 12$, ganzzahlige Teiler von a_0 : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12

$$f(1) = 4 \neq 0, f(-1) = 12 \neq 0$$

$f(2) = 0$, d.h. $x_1 = 2$ ist eine Nullstelle von f

$$f(x) = (x - 2) \cdot g(x)$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - 2} = (2x^3 - 4x^2 - 6x + 12) : (x - 2) = 2x^2 - 6$$

Auffinden von weiteren Nullstellen

$$g(x) = 2x^2 - 6 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$$

Produktform von $f(x)$

$$f(x) = 2(x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$