

Aufgaben 14 Funktionstypen Exponentialfunktion

Lernziele

- den zeitlichen Verlauf einer exponentiell wachsenden oder fallenden Grösse mit einer Exponentialfunktion beschreiben können.
- den Grafen der Exponentialfunktion kennen.
- die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion beurteilen können.
- einfachere Probleme zur Exponentialfunktion bearbeiten können.

Aufgaben

14.1 Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparkonto einer Bank bei einem jährlichen Zinssatz p (z.B. $p = 0.5\%$) angelegt.

- Zeigen Sie, dass der zeitliche Verlauf des Kapitals $K(t)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.
- Das Anfangskapital sei $K_0 = 1000$ Fr. und der Zinssatz $p = 0.5\%$. Bestimmen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

Hinweis:

- Für die Aufgabe b) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

14.2 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_i(x)$ ($1 \leq i \leq 4$) in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$$f_1(x) = 2^x \quad f_2(x) = 0.2^x \quad f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x \quad f_4(x) = -2 \cdot 3^x$$

14.3 Betrachten Sie die Exponentialfunktion

$$f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$$

- Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f für $A = B = \mathbb{R}$.
- Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von \mathbb{R} , so dass f bijektiv wird.
- Skizzieren Sie die Grafen der (nun bijektiven) Funktion f und deren Umkehrfunktion

$$f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$$

14.4 Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experimentes sind $5.12 \cdot 10^{20}$ radioaktive Atomkerne vorhanden. Nach 5 Stunden hat es noch deren $1.56 \cdot 10^{16}$.

Bestimmen Sie die Anzahl radioaktiver Atomkerne, welche 8 Stunden nach Beginn des Experimentes noch vorhanden sind.

Hinweis:

- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

14.5 Ein Kapital wird mit Zins und Zinseszins angelegt.

- Bestimmen Sie den Zinssatz p , bei welchem sich das Kapital in n Jahren verdoppelt.
- Berechnen Sie den in a) bestimmten Zinssatz p für $n = 20$.

Hinweis:

- Für die Aufgabe b) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

Lösungen

- 14.1 a) $K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^t$, $[t] = \text{Jahre}$
b) $K(5) = 1000 \cdot (1 + 0.005)^5 \text{ Fr.} = 1025.25 \text{ Fr.}$
- 14.2 ...
- 14.3 a) injektiv, nicht surjektiv \Rightarrow nicht bijektiv
b) $A = \mathbb{R}$
 $B = \mathbb{R}^+$
c) ...
- 14.4 $N(8h) = 3.04 \cdot 10^{13}$
- 14.5 a) $p = \sqrt[n]{2} - 1$
b) $p = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5\%$ (gerundet)