

Aufgaben 13 Funktionstypen Trigonometrische Funktionen und Gleichungen, Arkusfunktionen

Lernziele

- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer einfacheren trigonometrischen Funktion skizzieren können.
- die Lösungen einer einfacheren trigonometrischen Gleichung von Hand bestimmen können.
- die Umkehrfunktion einer einfacheren trigonometrischen Funktion bestimmen können.

Aufgaben

- 13.1 Betrachten Sie die einfachstmögliche Sinus-Funktion f und die aus ihr abgeleiteten Funktionen f_1 , f_2 , f_3 und f_4 :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_1(x) := \sin(x+b) \quad (b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_2(x) := \sin(a \cdot x) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_3(x) := A \cdot \sin(x) \quad (A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_4(x) := A \cdot \sin(ax+b) \quad (A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

- a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von ...
- ... f und f_1
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $b > 0$ und $b < 0$.
 - ... f und f_2
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $a > 1$ und $0 < a < 1$.
 - ... f und f_3
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $A > 1$ und $0 < A < 1$.
 - ... f und f_4 für den Fall $A > 1, a > 1, b < 0$.
- b) Geben Sie für alle Funktionen f, f_1, \dots, f_4 die Amplitude A , die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 an.

- 13.2 Papula 1: 318/5 (303/5), 318/6 (303/6), 318/4 (303/4)

- 13.3 Die Sinus-Funktion

$$f: \left\{ x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \left\{ y: y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq y \leq 1 \right\}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$$

ist bijektiv. Deren Umkehrfunktion f^{-1} ist die Arkussinus-Funktion \arcsin (vgl. Unterricht):

$$f^{-1}: \left\{ x: x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 1 \right\} \rightarrow \left\{ y: y \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

- a) Die Arkuscosinus-Funktion \arccos ist die Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion
- $$f: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq \pi\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \cos(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B , so dass die Cosinus-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion \arccos an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.
- b) Die Arkustangens-Funktion \arctan ist die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion
- $$f: \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \tan(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B , so dass die Tangens-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion \arctan an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.
- c) Die Arkuscotangens-Funktion arccot ist die Umkehrfunktion der Cotangens-Funktion
- $$f: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < \pi\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \cot(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B , so dass die Cotangens-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion arccot an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem.

13.4 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen:

- a) $\sin(x) = a$ ($-1 \leq a \leq 1$)
- b) $\cos(x) = b$ ($-1 \leq b \leq 1$)
- c) $\tan(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)
- d) $\cot(x) = d$ ($d \in \mathbb{R}$)

13.5 Papula 1: 320/16 (305/16)

13.6 Bearbeiten Sie für die beiden Funktionen in der Aufgabe 318/6 (303/6) im Buch Papula 1 die folgenden Teilaufgaben:

- i) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von \mathbb{R} , so dass die Funktion bijektiv wird.
- ii) Skizzieren Sie den Grafen der bijektiven Funktion.
- iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.
- iv) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion ins gleiche Koordinatensystem wie in ii).

Lösungen

- 13.1 a) i) ...
 ii) ...
 iii) ...
 iv) ...
- b) f: $A = 1$ $p = 2\pi$ $x_0 = 0$
 f_1 : $A = 1$ $p = 2\pi$ $x_0 = -b$
 f_2 : $A = 1$ $p = \frac{2\pi}{a}$ $x_0 = 0$
 f_3 : $A = A$ $p = 2\pi$ $x_0 = 0$
 f_4 : $A = A$ $p = \frac{2\pi}{a}$ $x_0 = -\frac{b}{a}$

13.2 siehe Papula 1

- 13.3 a) i) $B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq y \leq 1\}$
 ii) $f^{-1}: \{x: x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 1\} \rightarrow \{y: y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$
 $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$
 iii) ...
- b) i) $B = \mathbb{R}$
 ii) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$
 $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arctan(x)$
 iii) ...
- c) i) $B = \mathbb{R}$
 ii) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \{y: y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y < \pi\}$
 $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$
 iii) ...

- 13.4 a) $x_{1k} = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
 $x_{2k} = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- b) $x_{1k} = \arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
 $x_{2k} = -\arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- c) $x_k = \arctan(c) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- d) $x_k = \operatorname{arccot}(d) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

13.5 siehe Papula 1

- 13.6 a) i) $A = \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6}\right\}$
 $B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -4 \leq y \leq 4\}$
- ii) ...
- iii) $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \left(\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 2 \right)$
- iv) ...
- b) i) $A = \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0\right\}$
 $B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq y \leq 2\}$
- ii) ...
- iii) $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi \right)$
- iv) ...