

## Aufgaben 10      Funktionstypen Konstante, lineare, quadratische Funktion

### Lernziele

- den Grafen einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion skizzieren können.
- die Existenz von Nullstellen einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion beurteilen können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven linearen, quadratischen Funktion bestimmen können.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- die Normalform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion von Hand in die Scheitelpunktsform und umgekehrt umformen können.
- die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion bestimmen können, welche in einer konkreten Problemstellung den quadratischen Zusammenhang zweier Grössen beschreibt.

### Aufgaben

#### Konstante, lineare Funktion

10.1 Bearbeiten Sie für die konstante bzw. lineare Funktion  $f$  die folgenden Teilaufgaben:

- Skizzieren Sie den Grafen von  $f$ .
  - Beurteilen Sie, wieviele Nullstellen die Funktion  $f$  hat.
  - Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$ .
  - Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  für den Fall, dass  $f$  bijektiv ist.
  - Beurteilen Sie, ob und wie man die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$  beeinflussen kann, indem man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich auf je eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  einschränkt.
- Konstante** Funktion  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = a_0$
  - Lineare** Funktion  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = a_1 \cdot x + a_0 \quad (a_1 \neq 0)$

10.2 Fassen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  einer **linearen** Funktion  $f$  als neue Funktion auf, die jedem  $x \in \mathbb{R}$  ein  $y \in \mathbb{R}$  zuordnet:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$$

Die unabhängige Variable soll also wie bei der Ausgangsfunktion  $f$  mit  $x$  bezeichnet werden.

- Zeichnen Sie die Grafen von  $f$  und  $f^{-1}$  ins gleiche Koordinatensystem.  
Was gibt es für einen grafischen Zusammenhang zwischen den Grafen von  $f$  und  $f^{-1}$ ?
- Beurteilen Sie, ob der in a) gefundene Zusammenhang für die Grafen einer **beliebigen** bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion gilt.

*Quadratische Funktion*

10.3 Betrachten Sie die einfachstmögliche **quadratische** Funktion  $f$  und die aus  $f$  abgeleiteten Funktionen  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  und  $f_4$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^2$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_1(x) := f(x-x_0) = (x-x_0)^2 \quad (x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_2(x) := f(x) + y_0 = x^2 + y_0 \quad (y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_3(x) := f(a \cdot x) = (a \cdot x)^2 \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_4(x) := a \cdot f(x) = a \cdot x^2 \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von ...

i) ...  $f$  und  $f_1$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $x_0 > 0$  und  $x_0 < 0$ .

ii) ...  $f$  und  $f_2$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $y_0 > 0$  und  $y_0 < 0$ .

iii) ...  $f$  und  $f_3$

Unterscheiden Sie dabei die fünf Fälle  $a > 1$ ,  $0 < a < 1$ ,  $-1 < a < 0$ ,  $a = -1$  und  $a < -1$ .

iv) ...  $f$  und  $f_4$

Unterscheiden Sie dabei die fünf Fälle  $a > 1$ ,  $0 < a < 1$ ,  $-1 < a < 0$ ,  $a = -1$  und  $a < -1$ .

Formulieren Sie jeweils den bildlichen Zusammenhang zwischen den Grafen mit einem deutschen Satz.

b) Beurteilen Sie, ob die in a) formulierten Zusammenhänge zwischen den Grafen für eine **beliebige** Ausgangsfunktion  $f$  gelten.

10.4 Betrachten Sie die allgemeine quadratische Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

a) Beurteilen Sie grafisch, wieviele Nullstellen eine quadratische Funktion hat.

b) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$ .

c) Beurteilen Sie, ob und wie man die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$  beeinflussen kann, indem man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich auf je eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  einschränkt.

10.5 Gegeben sind die quadratischen Funktionen  $f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = \dots$

a)  $f(x) = x^2 - 2$

b)  $f(x) = -(x + 3)^2 - 4$

c)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

Lösen Sie für jede Funktion a) bis c) die folgenden Aufgaben:

i) Bestimmen Sie die Normalform und die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung von  $f$ .

ii) Skizzieren Sie den Grafen von  $f$  für  $A = B = \mathbb{R}$ .

iii) Bestimmen Sie die Mengen  $A$  und  $B$  so, dass die Funktion  $f$  bijektiv wird.

iii.i) Der Graf von  $f$  soll die ganze rechte Parabelhälfte inklusive Scheitelpunkt sein.

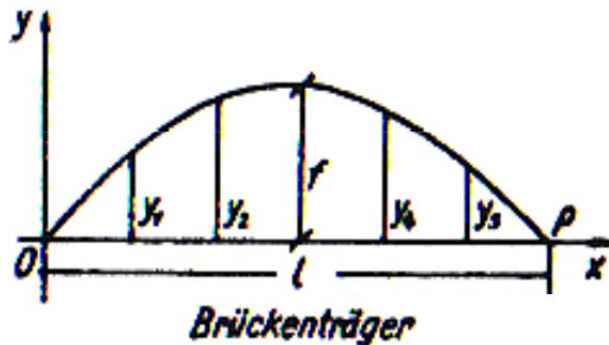
iii.ii) Der Graf von  $f$  soll die ganze linke Parabelhälfte inklusive Scheitelpunkt sein.

iv) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$  für beide Fälle in iii).

v) Skizzieren Sie die Grafen von  $f$  und  $f^{-1}$  für beide Fälle in iii)

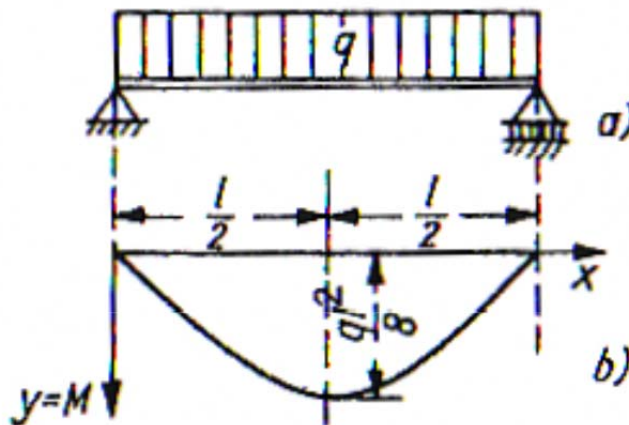
10.6 Papula 1: 314/4 (299/4) (ohne Produktform)

10.7 Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger von der Spannweite  $l = 20$  m und der Pfeilhöhe  $f = 5$  m.



Bestimmen Sie die Länge der fünf in gleichen Abständen angebrachten Vertikalstäbe.

10.8 Für den in Bild a) dargestellten, mit einer konstanten Streckenlast  $q$  belasteten Träger auf zwei Stützen gibt Bild b) den Verlauf des Biegemomentes  $M$ , die sogenannte Biegemomentenlinie wieder. Die Biegemomentenlinie ist eine Parabel:



Stellen Sie gemäss den Angaben des Bildes b) die Gleichung dieser Parabel auf, wobei der Ursprung des Koordinatensystems im linken Auflager liegen soll.

10.9 Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion  $f$  hat die allgemeine Form

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Zeigen Sie, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

Hinweise:

- Vergleichen Sie die Funktionsgleichung mit der in der Aufgabe 6.6 c) hergeleiteten Gleichung der Parabel.
- Wenn es gelingt, zu jeder Wahl für die Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  einen Parameterwert  $p$  und Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  für den Scheitelpunkt  $S$  zu finden, ist bewiesen, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

**Lösungen**

- 10.1 a) i) ...  
 ii)  $a_0 = 0$ : Jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist Nullstelle von  $f$ .  
 $a_0 \neq 0$ :  $f$  besitzt keine Nullstelle  
 iii) nicht injektiv, nicht surjektiv  $\Rightarrow$  nicht bijektiv  
 iv)  $f$  besitzt keine Umkehrfunktion.  
 v) ...
- b) i) ...  
 ii)  $f$  hat genau eine Nullstelle bei  $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$   
 iii) injektiv, surjektiv  $\Rightarrow$  bijektiv  
 iv)  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a_1}y - \frac{a_0}{a_1}$   
 v) ...
- 10.2 a) ...  
 b) ...
- 10.3 a) i) Der Graf von  $f_1$  ist gegenüber dem Grafen von  $f$  um  $x_0$  horizontal nach rechts (falls  $x_0 > 0$ ) bzw. nach links (falls  $x_0 < 0$ ) verschoben.  
 ii) Der Graf von  $f_2$  ist gegenüber dem Grafen von  $f$  um  $y_0$  vertikal nach oben (falls  $y_0 > 0$ ) bzw. nach unten (falls  $y_0 < 0$ ) verschoben.  
 iii) Der Graf von  $f_3$  ist gegenüber dem Grafen von  $f$  horizontal gestaucht (falls  $|a| > 1$ ) bzw. gestreckt (falls  $|a| < 1$ ). Für  $a < 0$  wird der Graf zusätzlich an der  $y$ -Achse gespiegelt.  
 iv) Der Graf von  $f_4$  ist gegenüber dem Grafen von  $f$  vertikal gestreckt (falls  $|a| > 1$ ) bzw. gestaucht (falls  $|a| < 1$ ). Für  $a < 0$  wird der Graf zusätzlich an der  $x$ -Achse gespiegelt.  
 b) ....
- 10.4 a) 0, 1 oder 2 Nullstellen  
 b) nicht injektiv, nicht surjektiv  $\Rightarrow$  nicht bijektiv  
 c) ...
- 10.5 a) i) Normalform:  $y = f(x) = x^2 - 2$   
 Scheitelpunktsform:  $y = f(x) = x^2 - 2$   
 ii) ...  
 iii) iii.i)  $A = \mathbb{R}_0^+, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -2\}$   
 iii.ii)  $A = \mathbb{R}_0^-, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -2\}$   
 iv) iv.i)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$   
 iv.ii)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x+2}$   
 v) v.i) ...  
 v.ii) ...

- b) i) Normalform:  $y = f(x) = -x^2 - 6x - 13$   
 Scheitelpunktsform:  $y = f(x) = -(x + 3)^2 - 4$
- ii) ...
- iii) iii.i)  $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -3\}, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \leq -4\}$   
 iii.ii)  $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \leq -3\}, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \leq -4\}$
- iv) iv.i)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{-x - 4} - 3$   
 iv.ii)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{-x - 4} - 3$
- v) v.i) ...  
 v.ii) ...
- c) i) Normalform:  $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 7$   
 Scheitelpunktsform:  $y = f(x) = 2(x - 1)^2 + 5$
- ii) ...
- iii) iii.i)  $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1\}, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 5\}$   
 iii.ii)  $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 1\}, B = \{y: y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 5\}$
- iv) iv.i)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{2}} + 1$   
 iv.ii)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-5}{2}} + 1$
- v) v.i) ...  
 v.ii) ...

10.6 siehe Papula 1

Hinweis:

- Im Papula 1 hat es möglicherweise einen Fehler in den Lösungen: Im zweiten Summanden sollte im Zähler des Koeffizienten die Zahl 31 stehen (und nicht 3).

10.7  $y_1 = y_5 = 2.78 \text{ m}$        $y_2 = y_4 = 4.44 \text{ m}$        $y_3 = f = 5.00 \text{ m}$

10.8  $y = -\frac{q}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{ql^2}{8}$

10.9 ...