Lineare Abhängigkeit

Linearkombination von Vektoren

Def.: Eine Summe von Vielfachen von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{a}_k \qquad (\lambda_k \in \mathbb{R})$$

Bsp.: Der Vektor $\vec{a}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - 2 \cdot \vec{a}_2 + 3 \cdot \vec{a}_3$$

Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren

Def.: Ein **Vektor** $\vec{a}$ ist von den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear abhängig**, wenn er sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Ein **Vektor** $\vec{a}$ ist von den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear unabhängig**, wenn er sich **nicht** als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Eine **Menge von Vektoren** $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist **linear abhängig**, wenn sich **mindestens ein** Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt.

Eine **Menge von Vektoren** $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist **linear unabhängig**, wenn sich **kein** Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt.

Bem.: Mit den folgenden beiden Aussagen wird das gleiche gemeint:

"Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ **ist** linear abhängig bzw. unabhängig."

"Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **sind** linear abhängig bzw. unabhängig."

Satz: Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur erfüllt werden kann mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

(Beweis siehe Aufgabe 13.6)

Rang

Def.: Der **Rang** einer Matrix A, bezeichnet mit **Rg(A)**, ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren von A.

Beh.: Bei jeder Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich gross wie die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.
(ohne Beweis)

Der Rang einer mxn-Matrix A ist mindestens 1 und höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n, d.h. $1 \leq \mathrm{Rg}(A) \leq \min(m,n)$
(Beweis folgt aus der vorangehenden Behauptung und aus der Definition des Ranges)

Wendet man auf eine Matrix eine elementare Zeilenoperation an, so bleibt der Rang der Matrix unverändert. Insbesondere gilt: $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(\mathrm{rref}(A))$
(ohne Beweis)

Determinante

Def.: Die **Determinante** einer Matrix A, bezeichnet mit **det(A)**, ist nur definiert, falls A quadratisch ist.

1-reihige Determinante

$$A = (a_{11})$$
$$\det(A) := a_{11}$$

2-reihige Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

3-reihige Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

(n-reihige Determinante mit n>3 wird hier nicht behandelt)

Beh.: Bei einer 3x3-Matrix A ist die Determinante von A gleich dem Spatprodukt der Spaltenvektoren von A.
(Beweis folgt aus den Definitionen der 3-reihigen Determinante und des Spatproduktes)

Alle Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer quadratischen Matrix A sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det(A) \neq 0$.
(ohne Beweis)

Für jede nxn-Matrix A gilt:

$$\mathrm{Rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$
$$\mathrm{Rg}(A) < n \iff \det(A) = 0$$

(Beweis folgt aus der vorangehenden Behauptung und aus der Definition des Ranges)

Def.: Eine quadratische Matrix A heisst **regulär**, falls $\det(A) \neq 0$.
Eine quadratische Matrix A heisst **singulär**, falls $\det(A) = 0$.