Aufgaben 15 — Lineare Abbildungen
Definition, Abbildungsmatrix, Spiegelung, Projektion

Lernziele

- beurteilen können, ob eine gegebene Abbildung linear ist oder nicht.
- die Abbildungsmatrix einer einfacheren linearen Abbildung bestimmen können.
- die allgemeine Form der Abbildungsmatrix einer Spiegelung an einer durch den Ursprung laufenden Ebene kennen und verstehen.
- die Abbildungsmatrix einer Spiegelung an einer konkreten, durch den Ursprung laufenden Ebene bestimmen und anwenden können.
- die allgemeine Form der Abbildungsmatrix einer Projektion entlang eines Vektors auf eine durch den Ursprung laufende Ebene kennen und verstehen.
- die Abbildungsmatrix einer Projektion entlang eines konkreten Vektors und auf eine konkrekte, durch den Ursprung laufende Ebene bestimmen und anwenden können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

15.1 Das Dreieck ABC mit A(1|2|-3), B(10|7|2) und C(5|4|6) soll parallel **verschoben** werden, und zwar um 5 Einheiten in x-Richtung, um 7 Einheiten in y-Richtung und um 12 Einheiten in z-Richtung.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Bilddreiecks A'B'C'.

Die Verschiebung kann als Abbildung f aufgefasst werden, die jedem Punkt P des dreidimensionalen Raumes einen Punkt P' des dreidimensionalen Raumes zuordnet.

Ein allgemeiner Punkt P(x|y|z) und dessen Bildpunkt P'(x'|y'|z') sollen nun als 3x1-Matrizen geschrieben werden:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Die Abbildung f kann dann als eine Abbildung aufgefasst werden, die jeder 3x1-Matrix P eine 3x1-Matrix P' zuordnet.

b) Formulieren Sie die Abbildungsvorschrift der Abbildung f, d.h. die Vorschrift, wie aus der Matrix P die Matrix P' berechnet werden kann.

15.2 Alle Punkte P des dreidimensionalen Raumes werden **gespiegelt** an der Ebene, welche von der y-Achse und der folgenden Geraden g aufgespannt wird:

$$g: \quad \vec{r} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Die Spiegelung ist eine Abbildung f, die jedem Punkt P(x|y|z) einen Bildpunkt P'(x'|y'|z') zuordnet.

a) Bestimmen Sie, wie die Koordinaten x', y' und z' des Bildpunktes P' von den Koordinaten x, y und z des ursprünglichen Punktes P abhängen.

Wie in der Aufgabe 15.1 können P und P' als 3x1-Matrizen geschrieben werden. Die Abbildung f kann dann als eine Abbildung aufgefasst werden, die jeder Matrix P eine Matrix P' zuordnet.

b) Die Matrix P' kann als Matrixmultiplikation einer Abbildungsmatrix A und der Matrix P geschrieben werden:

$$P' = A \cdot P$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A.

15.3 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Abbildung f linear ist oder nicht:

a) f aus der Aufgabe 15.1

$$f:\quad X \to Y = f(X) = X + V$$

b) f aus der Aufgabe 15.2

$$f:\quad X \to Y = f(X) = A \cdot X$$

15.4 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Abbildung f linear ist oder nicht:

a) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & X \to Y = f(X) = 2x + 3y \end{aligned}$$

f ordnet also jedem 2-komponentigen Vektor X (mit reellen Komponenten) eine reelle Zahl Y zu.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & X \to Y = f(X) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f ordnet also jedem 2-komponentigen Vektor X (mit reellen Komponenten) einen 2-komponentigen Vektor Y (mit reellen Komponenten) zu.

c) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & X \to Y = f(X) = |x| \end{aligned}$$

d) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & X \to Y = f(X) = 2x \cdot 3y \end{aligned}$$

e) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & X \to Y = f(X) = 2x - 3y + 4z \end{aligned}$$

f) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & X \to Y = f(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15.5 Von einer linearen Abbildung f im dreidimensionalen Raum ist bekannt, dass sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ wie folgt abbildet:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f.

15.6 Die lineare Abbildung f vertauscht die beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, d.h. $f(\vec{a}_1) = \vec{a}_2$ und $f(\vec{a}_2) = \vec{a}_1$:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A.

15.7 Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung f, welche das Dreieck ABC mit A(0|0), B(1|1) und C(2|-1) in das Dreieck A'B'C' mit A'(0|0), B'(3|0) und C'(0|-3) abbildet.

15.8 In einem Betrieb, der Baumaterialien herstellt, werden drei verschiedene Artikel gefertigt. Die nachfolgende Tabelle gibt an, wie gross die Materialkosten (in 1000 CHF) sowie der Arbeitsaufwand (in Stunden) für die Fertigung eines Stücks des entsprechenden Artikels sind.

	Materialkosten pro Stück (in kCHF)	Arbeitsaufwand pro Stück (in h)
Artikel 1	40	500
Artikel 2	80	600
Artikel 3	110	350

Der Zusammenhang zwischen den gefertigten Stückzahlen der drei Artikel und den totalen Materialkosten sowie dem totalen Arbeitsaufwand kann als lineare Abbildung f dargestellt werden:

$$f: \quad X = \begin{pmatrix} \text{Stückzahl Artikel 1} \\ \text{Stückzahl Artikel 2} \\ \text{Stückzahl Artikel 3} \end{pmatrix} \rightarrow Y = f(X) = \begin{pmatrix} \text{Totale Materialkosten (in kCHF)} \\ \text{Totaler Arbeitsaufwand (in h)} \end{pmatrix}$$

Beispielsweise ergibt sich für die Fertigung von 3 Stück des Artikels 1, 10 Stück des Artikels 2 und 1 Stück des Artikels 3:

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1030 \\ 7850 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Funktion f.

15.9 Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A für diejenigen Abbildungen f der Aufgabe 15.4, welche linear sind.

15.10 Im dreidimensionalen Raum ist eine **Spiegelung** an einer Ebene E, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, eine lineare Abbildung. Ihre Abbildungsmatrix A lautet wie folgt (ohne Herleitung):

$$A = E_3 - \frac{2}{|\vec{n}|^2} \cdot N \cdot N^T$$

wobei:
- E_3 ist die 3x3-Einheitsmatrix.
- $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.
- N ist eine 3x1-Matrix. Sie ist die Matrixdarstellung des Normalenvektors $\vec{n}$.
- N^T ist die Transponierte von N.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A, falls ein Normalenvektor der Ebene E gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15.11 Bestimmen Sie für die Spiegelung an der Ebene E …

i) … einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E.
ii) … die Abbildungsmatrix A der Spiegelung.
iii) … die Bilder P' und Q' der Punkte P(1|2|3) und Q(-1|3|3).

a) E ist die xy-Ebene.

b) E: y = z

c) E geht durch die Punkte A(0|2|1), B(-2|0|3) und C(1|3|0).

15.12 Im dreidimensionalen Raum ist eine **Projektion** auf eine Ebene E, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, eine lineare Abbildung. Ihre Abbildungsmatrix A lautet wie folgt (ohne Herleitung):

$$A = E_3 - \frac{1}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot V \cdot N^T$$

wobei:
- E_3 ist die 3x3-Einheitsmatrix.
- $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.
- $\vec{v}$ ist ein Vektor, der die Projektionsrichtung festlegt. Alle Punkte werden in Richtung bzw. Gegenrichtung des Vektors $\vec{v}$ projiziert.
- V ist eine 3x1-Matrix. Sie ist die Matrixdarstellung des Vektors $\vec{v}$.
- N ist eine 3x1-Matrix. Sie ist die Matrixdarstellung des Normalenvektors $\vec{n}$.
- N^T ist die Transponierte von N.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A, falls die beiden Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{v}$ gegeben sind durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15.13 Bestimmen Sie für die Projektion auf die Ebene

E: $2x + 5y - z = 0$

i) … die Abbildungsmatrix A.
ii) … die Bilder P' und Q' der Punkte P(1|2|3) und Q(0|1|5).

a) Die Projektion erfolgt senkrecht auf die Ebene E.

b) Die Projektion erfolgt in Richtung der y-Achse.

Lösungen

15.1 a) A'(6|9|9), B'(15|14|14), C'(10|11|18)

b) $P' = P + V \quad \text{mit } V = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$

15.2 a) x' = z, y' = y, z' = x

b) $P' = A \cdot P \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15.3 a) f nicht linear

b) f linear

15.4 a) f linear

b) f linear

c) f nicht linear

d) f nicht linear

e) f linear

f) f nicht linear

15.5 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

15.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

15.7 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15.8 $A = \begin{pmatrix} 40 & 80 & 110 \\ 500 & 600 & 350 \end{pmatrix}$

15.9 15.4 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

15.4 b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15.4 e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

15.10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

15.11 a) i) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

iii) P'(1|2|-3)
Q'(-1|3|-3)

b) i) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) P'(1|3|2)
Q'(-1|3|3)

c) i) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

iii) P'(-2|3|1)
Q'(-1|3|3) = Q (Q liegt auf E)

15.12 $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15.13 a) i) $A = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 26 & -10 & 2 \\ -10 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 29 \end{pmatrix}$

ii) $P'\left(\frac{2}{5}\middle|\frac{1}{2}\middle|\frac{33}{10}\right)$
Q'(0|1|5) = Q (Q liegt auf E)

b) i) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $P'\left(\frac{1}{6}\middle|\frac{1}{30}\middle|\frac{1}{2}\right)$
Q'(0|1|5) = Q (Q liegt auf E)