Aufgaben 14 Lineare Abhängigkeit
Rang, Determinante, Lösungsmenge eines lin. Gl.syst., Inverse Matrix

Lernziele

- den Rang einer Matrix mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen bestimmen können.
- eine ein-, zwei-, dreireihige Determinante bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine quadratische Matrix regulär oder singulär ist.
- die möglichen Fälle für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kennen und verstehen.
- aus der zu einem linearen Gleichungssystem gehörigen Koeffizienten- und erweiterten Koeffizientenmatrix die Lösungsmenge des Gleichungssystems beurteilen können.
- beurteilen können, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht.
- die Inverse einer invertierbaren Matrix mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens bestimmen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

Rang, Determinante

14.1 Papula 2: 153/8, 153/9, 153/10

Hinweise:
- Der Begriff der Unterdeterminante wurde im Unterricht nicht behandelt.
- Bearbeiten Sie daher 153/8 mit dem gleichen Lösungsweg wie 153/9 und 153/10.

14.2 Papula 2: 148/1, 148/2, 149/3, 149/4, 151/1

14.3 Beurteilen Sie anhand der allgemeinen 2x2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ob sich die Determinante ändert, wenn …

a) … die beiden Zeilen vertauscht werden.

b) … eine Zeile mit einer Zahl k ($k \in \mathbb{R}$) multipliziert wird.

c) … zu einer Zeile k-mal ($k \in \mathbb{R}$) die andere Zeile addiert wird.

d) … die Matrix mit einer Zahl k ($k \in \mathbb{R}$) multipliziert wird.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

14.4 Bezüglich der Lösungsmenge eines bestimmten linearen Gleichungssystems liegt immer einer der drei folgenden Fälle vor (vgl. Unterricht):

Fall 1: Das lineare Gleichungssystem hat **genau eine** Lösung.
Fall 2: Das lineare Gleichungssystem hat **unendlich viele** Lösungen.
Fall 3: Das lineare Gleichungssystem hat **keine** Lösung.

Beurteilen Sie mit schlüssigen Begründungen, welche der drei Fälle 1 bis 3 für die folgenden linearen Gleichungssysteme möglich sind:

a) Das Gleichungssystem hat **gleich viele** Gleichungen wie Unbekannte und ist …

i) … homogen.

ii) … inhomogen.

b) (siehe nächste Seite)

b) Das Gleichungssystem hat **mehr** Gleichungen als Unbekannte und ist …

i) … homogen.

ii) … inhomogen.

c) Das Gleichungssystem hat **weniger** Gleichungen als Unbekannte und ist …

i) … homogen.

ii) … inhomogen.

14.5 Papula 2: 154/2, 154/3, 154/4, 155/5, 155/6, 155/8, 155/9, 156/10

Hinweise:
- Generell sollen Sie nur die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen beurteilen.
- Die Lösungen selber müssen Sie nicht bestimmen (154/4, 154/5, 155/9, 156/10).

14.6 Bestimmen Sie die Werte von a und b, so dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

14.7 Papula 2: 152/2, 156/12

14.8 Beurteilen Sie, ob die Matrix A invertiertbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix A^{-1}.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Lösungen

14.1 siehe Papula 2

14.2 siehe Papula 2

14.3 a) Die Determinante ändert sich.
$\det(A_{neu}) = -\det(A)$

b) Die Determinante ändert sich, falls $k \neq 1$.
$\det(A_{neu}) = k\cdot\det(A)$

c) Die Determinante ändert sich nicht.

d) Die Determinante ändert sich, falls $|k| \neq 1$.
$\det(A_{neu}) = k^2\cdot\det(A)$

14.4 a) i) 1, 2

ii) 1, 2, 3

b) i) 1, 2

ii) 1, 2, 3

c) i) 2

ii) 2, 3

14.5 siehe Papula 2

14.6 $a = 1$ und $b = 3$

14.7 siehe Papula 2

14.8 a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) A nicht invertierbar

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) A nicht invertierbar

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $d \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d = 0$: A nicht invertierbar

g) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$