Aufgaben 12 — Matrizen
Definition, Rechenoperationen, Lineares Gleichungssystem

Lernziele

- die Bezeichnung der Matrixelemente kennen und verstehen.
- den Typ bzw. das Format einer Matrix erkennen können.
- die Transponierte einer Matrix bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine Matrix symmetrisch, schiefsymmetrisch ist.
- die Gleichheit zweier Matrizen beurteilen können.
- zwei Matrizen addieren bzw. voneinander subtrahieren können.
- die Rechenregeln der Addition, Subtraktion und des Transponierens kennen, verstehen und anwenden können.
- eine Matrix mit einem Skalar multiplizieren können.
- die Rechenregeln der Multiplikation mit einem Skalar kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen und verstehen, unter welchen Bedingungen zwei Matrizen miteinander multipliziert werden können.
- zwei Matrizen miteinander multiplizieren können.
- die Rechenregeln der Matrixmultiplikation kennen, verstehen und anwenden können.
- die Matrix-Rechenoperationen in einfacheren Problemstellungen anwenden können.
- ein lineares Gleichungssystem in der Matrixdarstellung schreiben können.
- aus der Matrixdarstellung eines linearen Gleichungssystems die einzelnen Gleichungen herauslesen können.
- aus einem linearen Gleichungssystem die zugehörige Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeffizientenmatrix herauslesen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

12.1 Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Typ bzw. das Format von A an.

b) Geben Sie die folgenden Matrixelemente an:

i) a_{21}

ii) a_{13}

iii) a_{33}

12.2 Papula 2: 147/1, 147/2

12.3 Bestimmen Sie w, x, y und z so, dass die folgende Gleichheit gilt:

$$\begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

12.4 Papula 2: 147/4, 147/5

12.5 Papula 2: 148/6, 148/7

12.6 Betrachten Sie noch einmal die Matrizen der Aufgabe 148/7 (Papula 2).

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (falls möglich):

a) $A \cdot (B + C)$

b) $A \cdot B + A \cdot C$

c) $(B \cdot A)^T$

d) $A^T \cdot B^T$

e) $B^T \cdot A^T$

12.7 Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A^8 = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$

Hinweis:
- Überlegen Sie sich, wie Sie den Rechenaufwand gering halten können. Es sind nämlich nicht sieben Matrixmultiplikationen nötig.

12.8 Gegeben ist die folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die in a) bis d) angegebenen Matrixmultiplikationen jeweils …

i) … das für die Multiplikation notwendige Format der Matrix B.

ii) … das Ergebnis der Matrixmultiplikation.

a) B ist die **Nullmatrix**. A soll von **links** mit B multipliziert werden.

b) B ist die **Nullmatrix**. A soll von **rechts** mit B multipliziert werden.

c) B ist die **Einheitsmatrix**. A soll von **links** mit B multipliziert werden.

d) B ist die **Einheitsmatrix**. A soll von **rechts** mit B multipliziert werden.

12.9 In $\mathbb{R}$ gilt, dass aus $a \cdot b = 0$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$. Die analoge Aussage für Matrizen gilt jedoch nicht!

Finden Sie zwei Matrizen A und B, so dass $A \cdot B$ die Nullmatrix ist, jedoch weder A noch B die Nullmatrix ist.

12.10 Gegeben ist die Matrixdarstellung eines linearen Gleichungssystems mit den vier Unbekannten x_1 bis x_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist von der Form

$$A \cdot x = c$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A|c = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

A ist die **Koeffizientenmatrix**, A|c die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des Gleichungssystems.

Schreiben Sie die einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems auf.

12.11 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 = -1 \\ &-3x_1 + 2x_2 = 5 \\ &8x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ &4x_2 - x_3 = -2 \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Koeffizientenmatrix an.

b) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

c) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Matrixdarstellung.

12.12 Im Unterricht wurde zur Einführung in das Thema Matrizen ein Beispiel zum statischen Gleichgewicht eines Balkens diskutiert. Dabei ist das folgende lineare Gleichungssystem mit den vier Unbekannten F_{Ax}, F_{Ay}, F_s und F_{GL} aufgetreten:

$$\begin{aligned} &F_{Ax} - F_s = 0 \\ &F_{Ay} - F_{GL} = F_{GB} \\ &\sin(\alpha)\cdot F_s - \cos(\alpha)\cdot F_{GL} = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \\ &\sin(\alpha)\cdot F_{Ax} - \cos(\alpha)\cdot F_{Ay} = -\tfrac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \end{aligned}$$

Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Matrixdarstellung.

12.13 In einem nahezu geschlossenen biologischen System leben drei Insektenpopulationen. Jedes Jahr schwärmen die Insekten aus, wobei alle Tiere den eigenen Stamm verlassen und je zur Hälfte zu einem der beiden anderen Stämme migrieren.

a, b und c seien die Individuenzahlen der drei Populationen zu Jahresanfang.
a', b' und c' seien die Individuenzahlen der drei Populationen nach der Migration am Ende des Jahres.

a) Bestimmen Sie die Individuenzahlen a', b' und c' nach einem Jahr.

b) Bestimmen Sie die Matrix A, so dass die Migration wie folgt beschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Hinweis:
- Das Resultat in a) bildet ein lineares Gleichungssystem.
- Dieses lineare Gleichungssystem kann in der Matrixdarstellung mit Hilfe einer Matrix A geschrieben werden.

c) Bestimmen Sie die Individuenzahlen a", b" und c" nach zwei Jahren in Abhängigkeit der Individuenzahlen a, b und c zu Beginn des ersten Jahres.

12.14 Betrachten Sie zwei dreikomponentige Vektoren, nämlich einen festen Vektor $\vec{a}$ und einen variablen Vektor $\vec{x}$. Die beiden Vektoren können auch als 3x1-Matrizen aufgefasst werden:

$$\text{Vektor } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Matrix } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Matrix } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) Das **Skalarprodukt** $\vec{a}\cdot\vec{x}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{x}$ kann als Matrixprodukt $A_S\cdot x$ der beiden Matrizen A_S und x aufgefasst werden. Dabei sollen die folgenden Bedingungen gelten:
- Die Matrixelemente von A_S hängen nur von den Komponenten des Vektors $\vec{a}$ ab.
- Das Matrixprodukt $A_S\cdot x$ ist eine 1x1-Matrix, dessen einziges Matrixelement gerade das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{x}$ ist.

Bestimmen Sie die Matrix A_S.

b) Das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{x}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{x}$ kann als Matrixprodukt $A_V\cdot x$ der beiden Matrizen A_V und x aufgefasst werden. Dabei sollen die folgenden Bedingungen gelten:
- Die Matrixelemente von A_V hängen nur von den Komponenten des Vektors $\vec{a}$ ab.
- Das Matrixprodukt $A_V\cdot x$ ist eine 3x1-Matrix, deren drei Matrixelemente gerade die Komponenten des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{x}$ sind.

Bestimmen Sie die Matrix A_V.

Lösungen

12.1 a) 2 x 3 - Matrix

b) i) $a_{21} = -1$

ii) $a_{13} = 0$

iii) a_{33} existiert nicht

12.2 siehe Papula 2

12.3 w = 5, x = 3, y = 2, z = -1

12.4 siehe Papula 2

12.5 siehe Papula 2

12.6 a) $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 8 & 36 & 18 \\ -3 & 52 & 20 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 36 & 18 \\ -3 & 52 & 20 \end{pmatrix}$

c) $(B \cdot A)^T$ existiert nicht

d) $A^T \cdot B^T$ existiert nicht

e) $B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 32 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

12.7 $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = (A^2)^2 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^8 = (A^4)^2 = A^4 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

12.8 a) i) m x 3 - Matrix ($m \in \mathbb{N}$ beliebig)
ii) m x 4 - Nullmatrix

b) i) 4 x n - Matrix ($n \in \mathbb{N}$ beliebig)
ii) 3 x n - Nullmatrix

c) i) 3 x 3 - Matrix
ii) B = A

d) i) 4 x 4 - Matrix
ii) B = A

12.9 …

12.10 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$
$-3x_1 + 2x_2 - x_4 = 5$
$8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$

12.11 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A|c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

12.12 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_s \\ F_{GL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{GB} \\ \frac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \\ -\frac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \end{pmatrix}$

12.13 a) $a' = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
$b' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$
$c' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = A\cdot\left(A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = A^2\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$

12.14 a) $A_S = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)$

b) $A_V = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$