Aufgaben 5 Anwendungen der Differentialrechnung
Extremwertaufgaben, Änderungsrate, Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

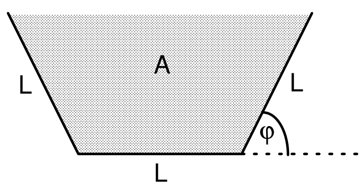
Lernziele

- die Differentialrechnung zur Lösung von Extremwertaufgaben anwenden können.
- die Änderungsrate einer linearen Grösse elementar geometrisch bestimmen können.
- die Änderungsrate einer nicht-linearen Grösse mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen können.
- die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital anwenden können.

Aufgaben

Extremwertaufgaben

5.1 Betrachten Sie das Beispiel der Wasserrinne aus dem Unterricht (Einführung Differentialrechnung):



Der Neigungswinkel φ der Seitenwände soll so gewählt werden, dass die Querschnittsfläche A der Rinne maximal wird.

a) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche A in Abhängigkeit des Winkels φ.

b) Fassen Sie nun A als Funktion von φ auf, d.h. $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \to A = A(\varphi)$.
Bestimmen Sie das absolute Maximum der Funktion A:

i) Bestimmen Sie die Ableitung A'.

ii) Bestimmen Sie die Stelle φ, für welche gilt: $A'(\varphi) = 0$

iii) Begründen Sie schlüssig, dass es sich bei der unter ii) bestimmten Stelle φ um das absolute Maximum der Funktion A handelt.

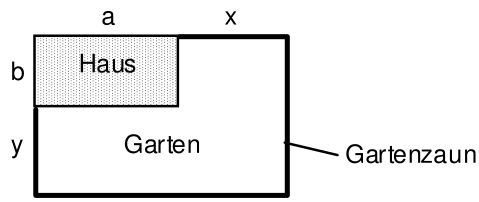
5.2 Bestimmen Sie, welche Fläche rechteckigen ebenen Geländes man mit einem 240 m langen Zaun höchstens umgeben kann.

5.3 Papula 1: 420/21 (397/19)

5.4 Es soll eine kreiszylindrische Alu-Dose mit einem vorgegebenen Volumen V hergestellt werden.

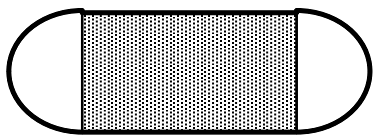
Bestimmen Sie, wie die Abmessungen (Radius, Höhe) der Alu-Dose gewählt werden müssen, damit die Oberfläche bzw. der Materialverbrauch minimal wird.

5.5 Ein Garten mit der Fläche A soll mit einem Gartenzaun abgegrenzt werden. Der Garten soll im Sinne der folgenden Zeichnung an ein Haus der Länge a und der Breite b angrenzen.



Bestimmen Sie die Längen x und y, so dass die gesamte Zaunlänge bei gegebener Gartenfläche A minimal wird.

5.6 In einem Leichtathletikstadion wird ein rechteckiges Feld (schraffiert) von einer Laufstrecke der Länge 400 m (fette Linie) umgeben:



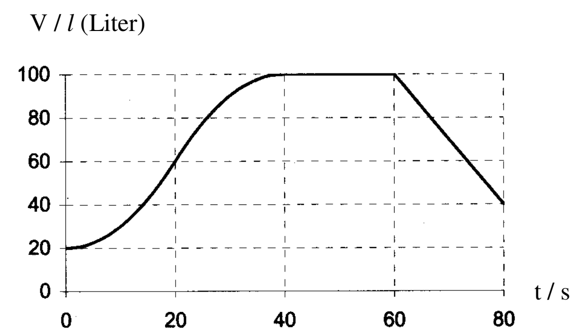
Bei welcher Länge und Breite des rechteckigen Feldes ist dessen Fläche maximal?

5.7 Aus einem rechteckigen Blech der Länge 27 cm und der Breite 18 cm wird ein oben offener Kasten hergestellt. Dazu werden an den vier Ecken des Bleches gleich grosse Quadrate ausgeschnitten. Die dadurch erzeugten überstehenden Ränder werden rechtwinklig zu Kastenseiten hochgebogen.

Bestimmen Sie die Grösse der auszuschneidenden Quadrate, damit das Volumen des Kastens maximal wird.

Änderungsrate

5.8 Das in einem Behälter gespeicherte Flüssigkeitsvolumen V ändert sich wie folgt:



Die Kurven über den Intervallen [0s, 20s] und [20s, 40s] seien Parabelstücke 2. Ordnung.

Bestimmen Sie die Volumenänderungsrate $\dot{V}$ zum Zeitpunkt t = 20s ...

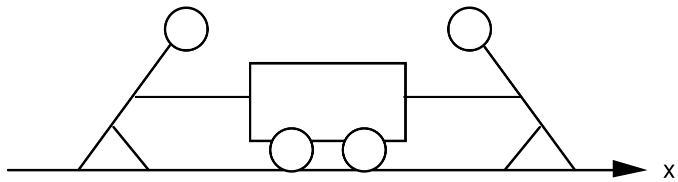
a) ... geometrisch.

Vorgehen:
i) Zeichnen Sie im Diagramm die entsprechende Tangente ein.
ii) Schätzen Sie die Steigung der Tangente mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ab.

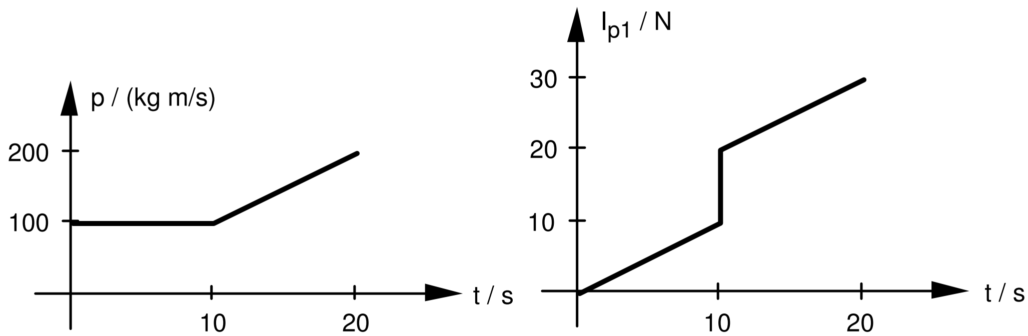
b) ... analytisch.

Vorgehen:
i) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion V: $t \rightarrow V(t)$.
ii) Leiten Sie die Funktion V ab.

5.9 Zwei Personen drücken in entgegengesetzte Richtungen an einem Wagen:



Man kennt den zeitlichen Verlauf des im Wagen gespeicherten Impulses p und den zeitlichen Verlauf der Impulsstromstärke I_{p1} im Arm der linken Person:



Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Impulsstromstärke I_{p2} im Arm der rechten Person, und stellen Sie ihn in einem I_{p2}-t-Diagramm dar.

Hinweise:
- Stellen Sie die aus der Physik bekannte Impulsbilanz auf.
- Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand und die Rollreibung.

Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

5.10 Papula 1: 638/18 (600/18), 639/19 (601/19)

Lösungen

5.1 a) $A = L^2 \sin(\varphi)\,(1 + \cos(\varphi))$

b) i) $A(\varphi) = L^2 \sin(\varphi)\,(1 + \cos(\varphi))$

$A'(\varphi) = L^2\left(\cos(\varphi)\,(1 + \cos(\varphi)) - \sin^2(\varphi)\right)$

ii) $A'(\varphi) = 0$ für $\varphi = 60°$

iii) ...

5.2 $A = 3600\ \text{m}^2$

5.3 siehe Papula 1

5.4 Radius $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ Höhe $h = 2r$

5.5 $x = \sqrt{ab + A} - a$ $y = \sqrt{ab + A} - b$

Daraus folgt, dass das ganze Grundstück, bestehend aus dem Haus und dem Garten, eine quadratische Grundfläche aufweist.

5.6 l := Länge Laufstrecke = 400 m

Länge $a = \frac{l}{4} = 100$ m Breite $b = \frac{l - 2a}{\pi} \approx 63.7$ m

5.7 a := Länge Blech
b := Breite Blech

Quadratseite $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \approx 3.5$ cm

5.8 a) i) ...

ii) $\dot{V}(20\text{s}) \approx 4\ l/\text{s}$

b) i)
$$V(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\ l/\text{s}^2\right) t^2 + 20\ l & (0\text{s} \le t \le 20\text{s}) \\ -\left(\frac{1}{10}\ l/\text{s}^2\right) t^2 + (8\ l/\text{s})\ t - 60\ l & (20\text{s} \le t \le 40\text{s}) \\ 100\ l & (40\text{s} \le t \le 60\text{s}) \\ -(3\ l/\text{s})\ t + 280\ l & (60\text{s} \le t \le 80\text{s}) \end{cases}$$

ii)
$$\dot{V}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\ l/\text{s}^2\right) t & (0\text{s} \le t \le 20\text{s}) \\ -\left(\frac{1}{5}\ l/\text{s}^2\right) t + 8\ \text{l/s} & (20\text{s} \le t \le 40\text{s}) \\ 0\ l/\text{s} & (40\text{s} \le t \le 60\text{s}) \\ -3\ l/\text{s} & (60\text{s} \le t \le 80\text{s}) \end{cases}$$

$\dot{V}(20\text{s}) = 4\ l/\text{s}$

5.9 Die Impulsstromstärke I_{p2} steigt im Zeitintervall $0\text{s} \le t \le 20\text{s}$ linear von 0 N auf 20 N.

5.10 siehe Papula 1