Aufgaben 2 — Ableitung
Elementare Ableitungsregeln, Kettenregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotientenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer Funktionen anwenden können.
- die Kettenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer zusammengesetzter Funktionen anwenden können.
- höhere Ableitungen einfacherer Funktionen von Hand und mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle bestimmen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

Elementare Ableitungsregeln

2.1 Papula 1, Seite 414 (391) "Zu Abschnitt 2": 414/1 (391/1), 414/2 (391/2), 414/3 (391/3)

2.2 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) f: $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot e^x}$

b) p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \to y = p(a) = 5ab\,(ac^2 + \sin(b))$

c) q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ b \to y = q(b) = 5ab\,(ac^2 + \sin(b))$

d) r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \to y = r(c) = 5ab\,(ac^2 + \sin(b))$

Kettenregel

2.3 Papula 1: 415/4 (392/4), 415/5 (392/5)

Höhere Ableitungen

2.4 Papula 1: 416/15 (393/15), 417/16 (394/16)

2.5 Eine Polynomfunktion k-ten Grades hat die folgende allgemeine Form:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_k \cdot x^k$

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die 1. Ableitung f'.
ii) ... die 2. Ableitung f''.

b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Die k-te Ableitung einer Polynomfunktion k-ten Grades ist eine konstante Funktion."

Lösungen

2.1 siehe Papula 1

2.2 a) $f'\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)(1+x)}{x^2\, e^x}$

b) $p'\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \to y = p'(a) = 5b\,(2ac^2 + \sin(b))$

c) $q'\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ b \to y = q'(b) = 5a\,(ac^2 + \sin(b) + b\cdot\cos(b))$

d) $r'\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \to y = r'(c) = 10a^2bc$

2.3 siehe Papula 1

2.4 siehe Papula 1

2.5 a) i) $f'\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f'(x) = a_1 + 2a_2\cdot x + 3a_3\cdot x^2 + 4a_4\cdot x^3 + \ldots + ka_k\cdot x^{k-1}$

ii) $f''\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f''(x) = 2a_2 + 6a_3\cdot x + 12a_4\cdot x^2 + 20a_5\cdot x^3 + \ldots + k(k-1)a_k\cdot x^{k-2}$

b) f' ist eine Polynomfunktion (k-1)-ten Grades.
f'' ist eine Polynomfunktion (k-2)-ten Grades.
usw.

Bei jedem Ableiten reduziert sich der Grad der Polynomfunktion um 1.
Nach k-maligem Ableiten bleibt eine Polynomfunktion 0-ten Grades, also eine konstante Funktion.