Aufgaben 15 Funktionstypen
Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Exp.-/Log.-Gleichungen

Lernziele

- verstehen, dass jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt werden kann.
- verstehen, dass die relative Änderung einer sich zeitlich exponentiell veränderlichen Grösse in gleichen Zeitbereichen gleich ist.
- einfachere Logarithmen von Hand berechnen können.
- die Rechenregeln für Logarithmen anwenden können.
- die einfach-logarithmische Darstellung von Exponentialfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die doppelt-logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die Beziehung zwischen Schallintensität und Schallpegel als Beispiel einer Logarithmusfunktion kennen.
- einfachere Exponential- und Logarithmusgleichungen von Hand lösen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

15.1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke von Hand:

a)	$\lg(10)$	b)	$\lg(10'000)$	c)	$\log_2(32)$
d)	$\log_5(125)$	e)	$\ln(e^4)$	f)	$\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
g)	$\log_a(a)$	h)	$\log_a(a^x)$	i)	$\log_a(1)$
j)	$\log_a\left(\sqrt{a}\right)$	k)	$a^{\log_a(x)}$ $(x\in R^+)$	l)	$e^{-\ln(e/2)}$

15.2 Der zeitliche Verlauf einer Grösse N, die exponentiell wächst oder fällt, kann mit Hilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt werden:

$N(t) = N_0\, a^t$ wobei: t = Zeit
$N(t)$ = Grösse N zum Zeitpunkt t
N_0 = Grösse N zum Zeitpunkt t = 0

exponentielles Wachsen, falls $a>1$
(Bsp.: Kapital auf Bankkonto, Bakterienkultur)

exponentielles Fallen, falls $0<a<1$
(Bsp.: Radioaktiver Zerfall)

In den Naturwissenschaften und in der Technik wird ein exponentieller Verlauf meistens durch die Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt:

$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}$ (exponentielles Wachsen) bzw.

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ (exponentielles Fallen)

a) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Wachsens tatsächlich zu jedem $a>1$ ein $\lambda>0$ finden kann, so dass für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

b) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Fallens tatsächlich zu jedem a ($0<a<1$) ein $\lambda>0$ finden kann, so dass für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{-\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

15.3 In der Aufgabe 14.1 wurde festgestellt, dass der zeitliche Verlauf eines Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.

Gemäss Aufgabe 15.2 kann jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e und dem Parameter λ ausgedrückt werden.

Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e, und bestimmen Sie den Wert des Parameters λ für den Zinssatz p = 0.5%.

15.4 Der mittlere Luftdruck in der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe über Meer näherungsweise exponentiell ab:

$p(h) = p_0\, e^{-\lambda h}$ wobei: h = Höhe über Meer
p(h) = mittlerer Luftdruck auf der Höhe h
p_0 = mittlerer Luftdruck auf Meereshöhe = 1013 hPa

In Chur (h = 593 m) beträgt der mittlere Luftdruck 941 hPa.

Bestimmen Sie den mittleren Luftdruck auf dem Mount Everest (h = 8848 m).

15.5 Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl N der radioaktiven Kerne exponentiell ab:

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \quad (\lambda>0)$

Zeigen Sie, dass die Zeitspannen, in welchen sich N jeweils halbiert, alle gleich lang sind.

Zu zeigen ist also, dass es - von einem beliebigen Zeitpunkt aus gesehen - immer jeweils gleich lang dauert, bis N jeweils wieder auf den halben Wert abgesunken ist.

15.6 Fassen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

a) $\log_a(m) + \log_a(n)$ b) $\log_a(m) - \log_a(n)$

c) $\log_a(b) + \log_a(c) - \left(\log_a(d) + \log_a(e)\right)$ d) $-\log_a(r)$

e) $\log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z) - \log_a(u) - \log_a(v)$ f) $m\cdot\log_a(x) - n\cdot\log_a(y)$

g) $\frac{1}{n}\left(\log_a(x) + \log_a(y) - \log_a(z)\right)$ h) $\log_a(a^{1/2}) + \log_a(a^{3/2}) - \log_a(\sqrt{b}\,)$

15.7 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze als Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen:

a) $\log_a(pqr)$ b) $\log_a(3xy)$ c) $\log_a(b(c+d))$

d) $\log_a(pq-pr)$ e) $\log_a(b^3)$ f) $\log_a\left(\frac{1}{c^2}\right)$

g) $\log_a\left((b+c)^4\right)$ h) $\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\right)$

15.8 Gegeben ist die Exponentialfunktion

$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = y_0\cdot a^{kx}$

a) Betrachten Sie die konkrete Exponentialfunktion mit den Parameterwerten $y_0 = 5$, $a = 10$, $k = 2$.

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein einfach-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "x-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(5).

b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem x-$\log_a$(y)-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_0)$.

15.9 Gegeben ist die Potenzfunktion

$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = y_1 \cdot x^k$

a) Betrachten Sie die konkrete Potenzfunktion mit den Parameterwerten $y_1 = 3$, $k = 2$.

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "lg(x)-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(3).

b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem $\log_a(x)$-$\log_a(y)$-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_1)$.

15.10 * Der Zusammenhang zwischen dem Schallpegel L und der Schallintensität I einer Schallquelle wird durch eine Logarithmusfunktion beschrieben (vgl. Unterricht):

$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ wobei: $I_0 := 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ (Hörschwelle)

a) Gegeben sei eine als punktförmige Schallquelle betrachtete Sirene mit der Schallleistung 1000 W.

Bestimmen Sie die Schallintensität und den Schallpegel im Abstand 100 m von der Sirene, falls von Verlusten abgesehen wird.

b) Zeigen Sie, dass der Schallpegel L bei jeder Verdoppelung des Abstandes von der Sirene jeweils um gleich viele Dezibel abnimmt - und zwar unabhängig davon, von welchem Anfangsabstand man ausgeht.

Bestimmen Sie, um wieviel sich der Schallpegel bei jeder Verdoppelung des Abstandes verändert.

15.11 Papula 1: 322/12 (307/12), 322/13 (307/13)

Lösungen

15.1	a)	1	b)	4	c)	5	d)	3
	e)	4	f)	-4	g)	1	h)	x
	i)	0	j)	$\frac{1}{2}$	k)	x	l)	$\frac{2}{e}$

15.2 a) $\lambda = \ln(a)$ b) $\lambda = -\ln(a)$

15.3 $K(t) = K_0\, e^{\lambda t}$

$\lambda = \ln(1 + p) = 0.0049...$

15.4 $\lambda = \frac{-\ln\left(\left(\frac{p(h)}{p_0}\right)\right)}{h} = \frac{-\ln\left(\left(\frac{941\text{ hPa}}{1010\text{ hPa}}\right)\right)}{593\text{ m}} = 1.24\cdot 10^{-4}\text{ m}^{-1}$ (gerundet)

$p(8848\text{ m}) = 337\text{ hPa}$

15.5 ...

15.6
a) $\log_a(mn)$ b) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$ c) $\log_a\left(\frac{bc}{de}\right)$
d) $\log_a\left(\frac{1}{r}\right)$ e) $\log_a\left(\frac{xyz}{uv}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{x^m}{y^n}\right)$
g) $\log_a\left(\sqrt[n]{\frac{xy}{z}}\right)$ h) $\log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$

15.7
a) $\log_a(p) + \log_a(q) + \log_a(r)$ b) $\log_a(3) + \log_a(x) + \log_a(y)$
c) $\log_a(b) + \log_a(c+d)$ d) $\log_a(p) + \log_a(q-r)$
e) $3\cdot\log_a(b)$ f) $-2\cdot\log_a(c)$
g) $4\cdot\log_a(b+c)$ h) $-\frac{3}{2}\log_a(x) + \frac{5}{2}\log_a(y) - 2\log_a(z)$

15.8 a) ...

b) $y = y_0\cdot a^{kx}$ | $\log_a(...)$
$\log_a(y) = \log_a(y_0) + k\cdot x$

15.9 a) ...

b) $y = y_1\cdot x^k$ | $\log_a(...)$
$\log_a(y) = \log_a(y_1) + k\cdot\log_a(x)$

15.10 * a) $I = 8.0\cdot 10^{-3}\text{ W/m}^2$, $L = 99\text{ dB}$

b) $\Delta L \approx -6\text{ dB}$

15.11 siehe Papula 1