

## Aufgaben 14      Funktionstypen Exponentialfunktion

### Lernziele

- den zeitlichen Verlauf einer exponentiell wachsenden oder fallenden Grösse mit einer Exponentialfunktion beschreiben können.
- den Grafen der Exponentialfunktion kennen.
- die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion beurteilen können.
- einfachere Probleme zur Exponentialfunktion bearbeiten können.

### Aufgaben

- 14.1 Ein Kapital  $K_0$  wird auf einem Sparkonto einer Bank bei einem jährlichen Zinssatz  $p$  angelegt.
- Zeigen Sie, dass der zeitliche Verlauf des Kapitals  $K(t)$  durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.
  - Das Anfangskapital sei  $K_0 = 1000$  Fr. und der Zinssatz  $p = 0.5\%$ . Bestimmen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

- 14.2 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = f_1(x) = 2^x$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = f_2(x) = 0.2^x$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x$$

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = f_4(x) = -2 \cdot 3^x$$

- 14.3 Betrachten Sie die Exponentialfunktion

$$f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$$

- Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$  für  $A = B = \mathbb{R}$ .
- Bestimmen Sie für den Definitionsbereich  $A$  und den Zielbereich  $B$  "grösstmögliche" Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so dass  $f$  bijektiv wird.
- Skizzieren Sie die Grafen der (nun bijektiven) Funktion  $f$  und deren Umkehrfunktion

$$f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \dots$$

- 14.4 Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experimentes sind  $5.12 \cdot 10^{20}$  radioaktive Atomkerne vorhanden. Nach 5 Stunden hat es noch deren  $1.56 \cdot 10^{16}$ . Bestimmen Sie die Anzahl radioaktiver Atomkerne, welche 8 Stunden nach Beginn des Experimentes noch vorhanden sind.

- 14.5 Ein Kapital wird mit Zins und Zinseszins angelegt.

- Bestimmen Sie den Zinssatz  $p$ , bei welchem sich das Kapital in  $n$  Jahren verdoppelt.
- Berechnen Sie den in a) bestimmten Zinssatz  $p$  für  $n = 20$ .

**Lösungen**

- 14.1 a)  $K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^t$ ,  $[t] = \text{Jahre}$   
b)  $K(5) = 1000 \cdot (1 + 0.005)^5 \text{ Fr.} = 1025.25 \text{ Fr.}$

14.2 ...

- 14.3 a) injektiv, nicht surjektiv  $\Rightarrow$  nicht bijektiv  
b)  $A = \mathbb{R}$   
 $B = \mathbb{R}^+$   
c) ...

14.4  $N(8h) = 3.04 \cdot 10^{13}$

- 14.5 a)  $p = \sqrt[n]{2} - 1$   
b)  $p = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5 \% \text{ (gerundet)}$