Aufgaben 11 Funktionstypen Ganzrationale Funktion

Lernziele

- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines Polynoms verstehen.
- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines einfacheren Polynoms bestimmen können.
- die Regel zum Auffinden von ganzzahligen Nullstellen einer Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten anwenden können.
- charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

11.1 Gegeben ist die folgende Polynomfunktion f vom Grad 3.

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to\ y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

a) i) Überprüfen Sie, dass $x = 1$ eine **Nullstelle** von f ist.

ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$$

Stellen Sie fest, dass es **möglich** ist, f(x) als Produkt des Linearfaktors $(x - 1)$ und eines Polynoms g(x) darzustellen, wobei die Polynomfunktion g vom Grad 2 ist.

b) i) Überprüfen Sie, dass $x = 2$ **keine Nullstelle** von f ist.

ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$$

Stellen Sie fest, dass es **nicht möglich** ist, f(x) als Produkt des Linearfaktors $(x - 2)$ und eines Polynoms g(x) darzustellen.

c) $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von f (siehe a)).
Bestimmen Sie die restlichen reellen Nullstellen von f, und stellen Sie f(x) in der Produktform dar.

11.2 Papula 1: 313/3 (299/3) (nur Produktform), 314/7 (299/7), 315/13 (300/13) (ohne Horner-Schema)

11.3 Bestimmen Sie die Produktform der folgenden Polynome:

a) $f(x) = - 2x^5 + 12x^4 - 2x + 12$

b) $f(x) = 3x^5 - 36x^4 + 141x^3 - 168x^2 - 108x + 240$

11.4 Betrachten Sie die allgemeine Polynomfunktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to\ y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ a_n \neq 0)$$

Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer Polynomfunktion vom Grad n.
Gesucht sind Eigenschaften, die zwar von n, jedoch nicht von den konkreten Werten der Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ abhängen.

Hinweise:
- Betrachten Sie den Fundamentalsatz der Algebra (siehe Theorieblätter "Ganzrationale Funktion").
- Überlegen Sie sich, dass ein einziger Summand des Polynoms f(x) das Verhalten des Funktionsgrafen für $x \to \pm\infty$ bestimmt.

Lösungen

11.1 a) i) ...

ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
g mit $g(x) = x^2 - x - 6$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2

b) i) ...

ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$
g mit $g(x) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$ ist keine Polynomfunktion

c) $x_2 = 3$, $x_3 = - 2$
$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

11.2 siehe Papula 1

11.3 a) $f(x) = - 2(x - 6)(x^4 + 1)$

b) $f(x) = 3(x - 2)^2(x + 1)(x - 4)(x - 5)$

11.4 ...