

Aufgaben 3 Vektoren Vektorprodukt, Spatprodukt

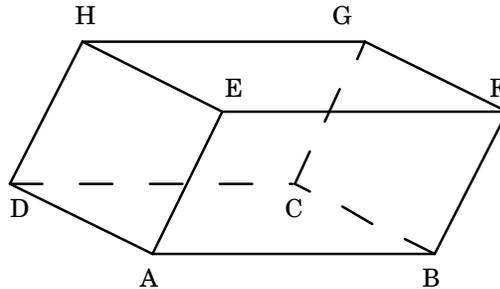
Lernziele

- das Vektorprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Vektorproduktes anwenden können.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- das Spatprodukt dreier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- ein Spatprodukt mit Hilfe einer dreireihigen Determinante berechnen können.
- die Rechenregeln für das Spatprodukt anwenden können.
- das Spatprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

3.1 Papula 1: 139/23 (131/23), 139/24 (131/24)

3.2 Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird.

3.3 Gegeben sind die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Überlegen Sie sich, wie viele Einheitsvektoren es gibt, die sowohl zu \vec{a} als auch zu \vec{b} senkrecht stehen.
- Bestimmen Sie diese Einheitsvektoren.

3.4 Eine Pyramide bestehe aus der Basis ABC und der Spitze S:

$$A(2|4|-7) \quad B(-1|-5|5) \quad C(3|4|-9) \quad S(8|4|8)$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der über S hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von S den Abstand 7 hat.

3.5 Papula 1: 139/26 (132/26), 140/27 (132/27), 140/28 (132/28), 140/29 (132/29)

Lösungen

3.1 siehe Papula 1

$$3.2 \quad A_{\triangle BDG} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG}| = \frac{1}{2} \sqrt{608} = 12.3\dots$$

3.3 a) 2 Einheitsvektoren

$$\text{b) } \vec{x} = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$|\vec{x}| = 1$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3.4 \overrightarrow{SP} steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und hat Betrag 7

$$\overrightarrow{SP} = k \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$|\overrightarrow{SP}| = 7$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow P(14|6|11)$$

3.5 siehe Papula 1