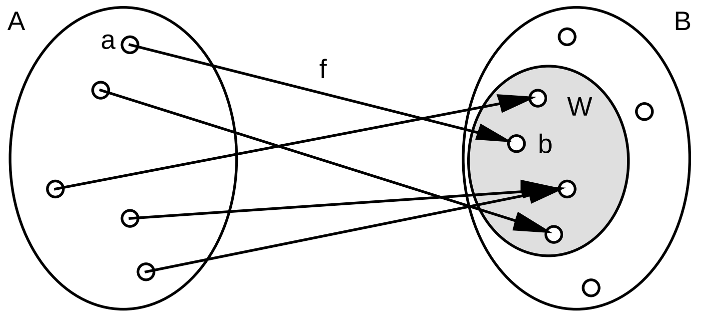
Funktion

Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element a aus einer Menge A **genau ein** Element b aus einer Menge B zuordnet.

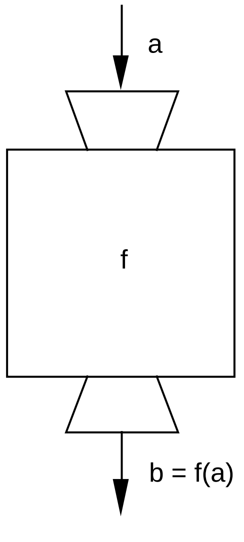


Durch die Funktion f wird die Menge A auf die Menge B **abgebildet**.

f: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = f(a)$ ("f von a")

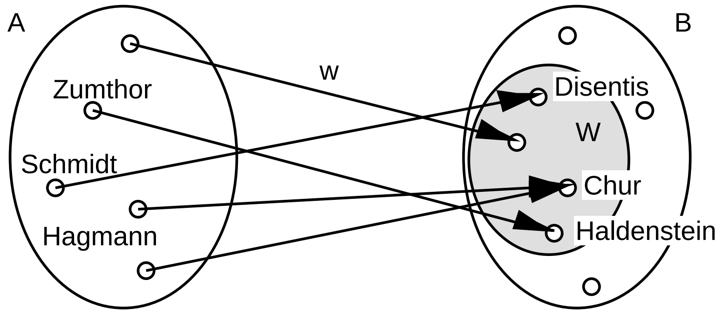
Die Menge A ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge B der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat), die Menge W der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion f.

b ist das zum Element a gehörige **Bildelement** (Funktionswert).



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \to B$
$a \to b = w(a)$ = Wohnort von a



2. A = Menge aller Eisenbahnbrücken im Kanton Graubünden
B = {1847, 1848, 1849, ..., 2007, 2008, 2009}

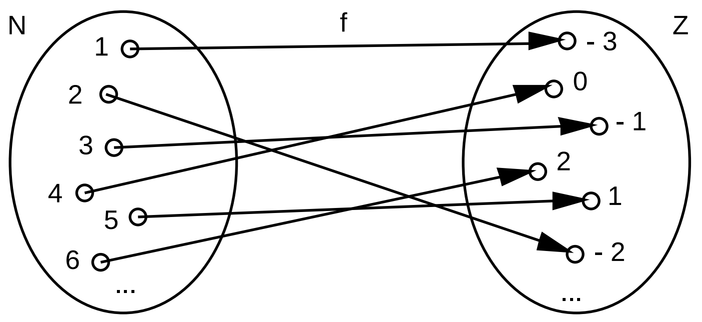
e: $A \to B$
$b \to j = e(b)$ = Jahr der Einweihung von b

3. A = B = Menge aller Punkte einer Ebene

S_g: $A \to A$
$P \to P' = S_g(P)$ = Bildpunkt von P bezüglich der Geradenspiegelung an der Geraden g

4. A = N (= Menge der natürlichen Zahlen)
B = Z (= Menge der ganzen Zahlen)

f: $N \to Z$
$n \to y = f(n) = n - 4$



5. $A = R_0^+$ (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)
B = R (= Menge der reellen Zahlen)

f: $R_0^+ \to R$
$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$

6. A = B = R

p: $R \to R$
$x \to y = p(x) = \frac{x^3-3}{2x^2+1}$

Darstellung einer Funktion

Pfeildiagramm

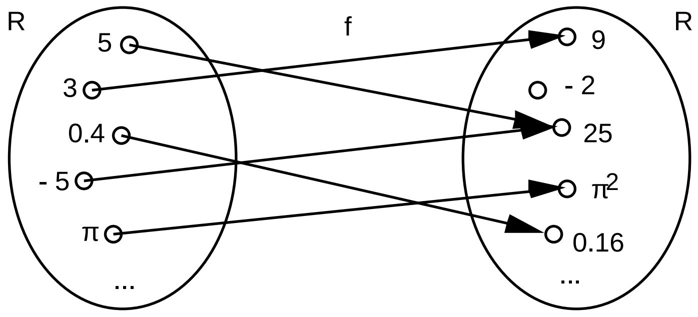


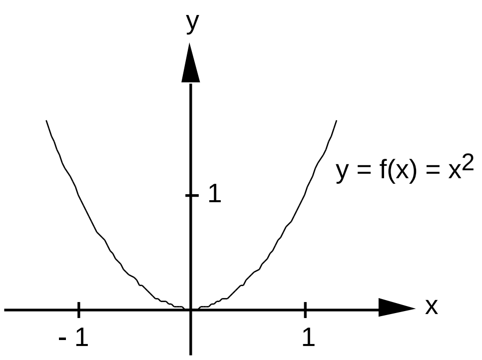
Tabelle (Wertetabelle)

x	y
1	1
3	9
5	25
- 5	25
0.4	0.16
...	...

Funktionsvorschrift (Funktionsgleichung)

$$
\begin{aligned}
f: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
& x \rightarrow y = f(x) = x^2
\end{aligned}
$$

Graf



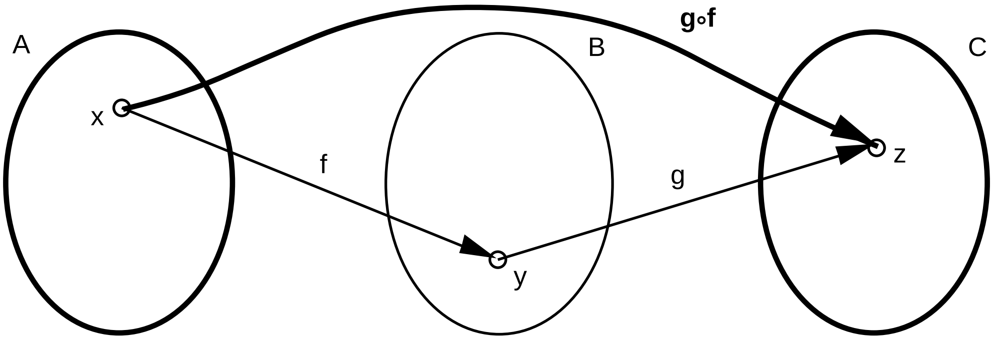
Zusammengesetzte Funktion

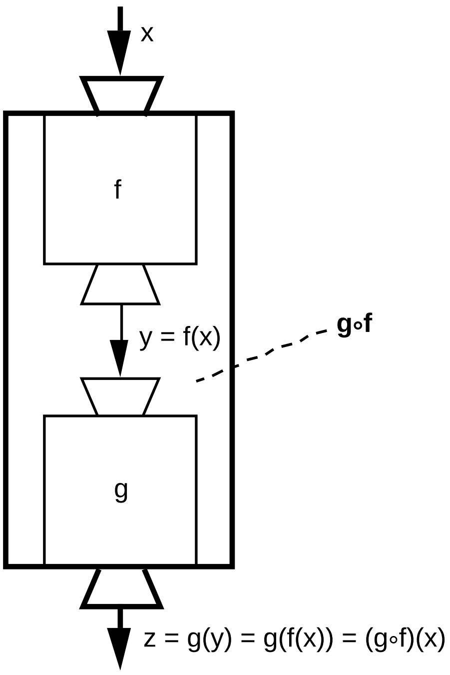
Gegeben seien zwei Funktionen f und g:

$$f: \quad A \to B, \quad x \to y = f(x) \qquad\qquad g: \quad B \to C, \quad y \to z = g(y)$$

Def.: Die **zusammengesetzte Funktion** $g \circ f$ ist definiert durch:

$$g \circ f: \quad A \to C, \quad x \to z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$$





Bsp.: $f: \quad N \to Q^+, \quad x \to y = f(x) = \frac{x}{2} \qquad\qquad g: \quad Q^+ \to R^+, \quad y \to z = g(y) = \sqrt{y}$

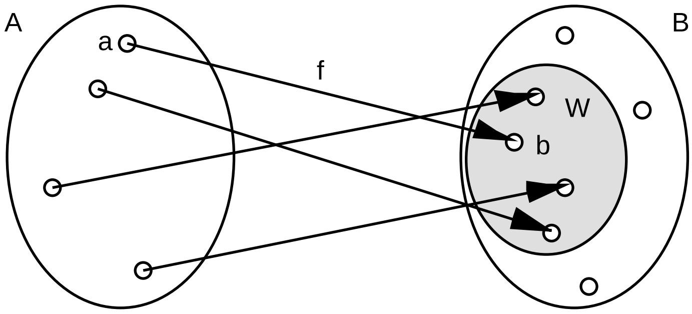
$$g \circ f: \quad N \to R^+$$

$$x \to z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

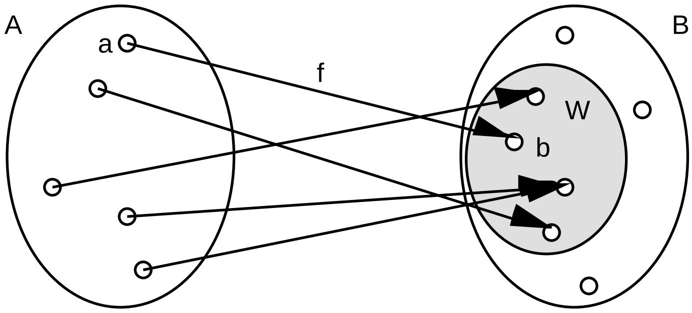
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **injektiv**, falls jedes Element b   W Bildelement eines **einzigen** Elementes a   A ist.

Injektive Funktion

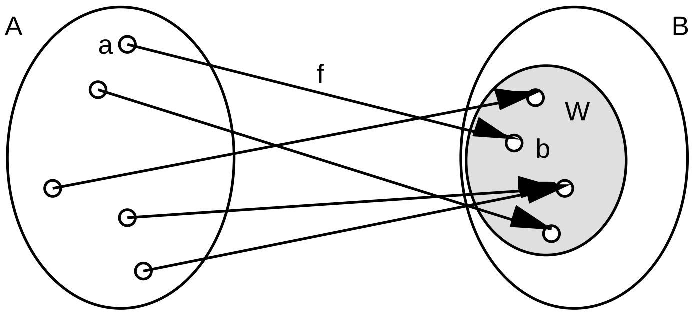


Nicht-injektive Funktion

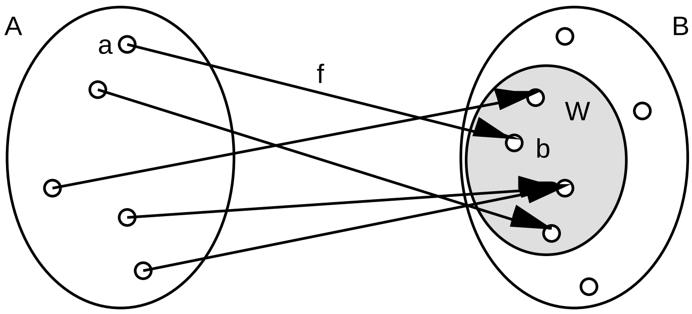


Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **surjektiv**, falls **jedes** Element b   B als Bildelement auftritt, d.h. falls W = B.

Surjektive Funktion

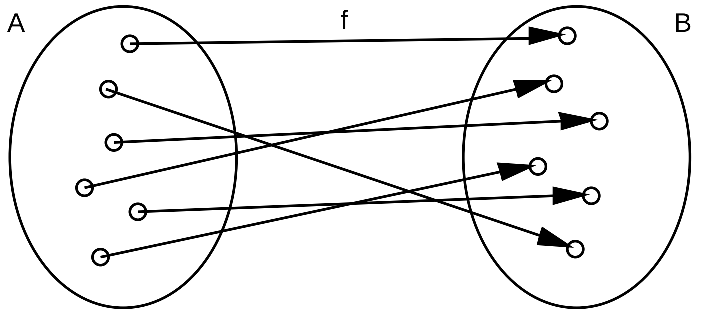


Nicht-surjektive Funktion



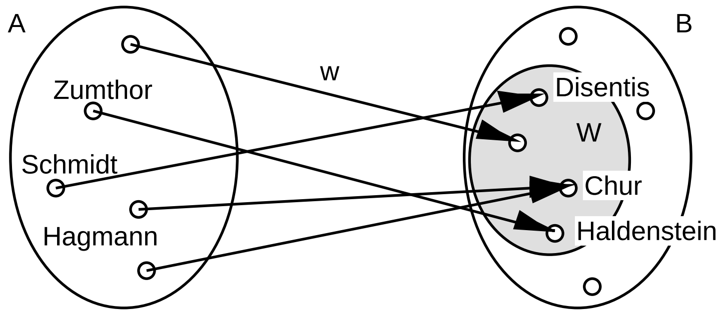
Def.: Eine Funktion f: A $\rightarrow$ B heisst **bijektiv**, falls sie **sowohl injektiv als auch surjektiv** ist.

Bijektive Funktion



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = w(a)$ = Wohnort von a



nicht injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

2. f: $R \rightarrow R$
$x \rightarrow y = f(x) = -x$

injektiv, surjektiv bijektiv

3. f: $R \rightarrow R_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

nicht injektiv, surjektiv nicht bijektiv

4. f: $R_0^+ \rightarrow R$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

5. f: $R_0^+ \rightarrow R_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, surjektiv bijektiv

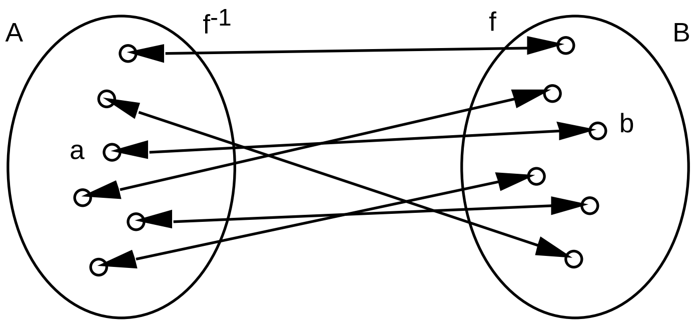
Umkehrfunktion

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

$$f: \quad A \to B$$
$$a \to b = f(a)$$

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} ordnet jedem Element b B dasjenige Element a A zu, welches durch die Funktion f dem Element b B zugeordnet wird.

$$f^{-1}: \quad B \to A$$
$$b \to a = f^{-1}(b)$$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher
B = Menge aller Sitzplätze

$f: \quad A \to B$
$x \to y = f(x)$ = Sitzplatz von Kinobesucher x

$f^{-1}: \quad B \to A$
$y \to x = f^{-1}(y)$ = Kinobesucher auf Sitzplatz y

2. $A = Z$
$B = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$$f: \quad A \to B$$
$$x \to y = f(x) = 2x$$

$$f^{-1}: \quad B \to A$$
$$y \to x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} y$$

3. $$f: \quad R_0^+ \to R_0^+$$
$$x \to y = f(x) = x^2$$

$$f^{-1}: \quad R_0^+ \to R_0^+$$
$$y \to x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Def.: Die **identische Abbildung/Funktion** $\mathbb{1}$ ist definiert durch:

$$\mathbb{1}: \quad A \to A$$
$$x \to y = \mathbb{1}(x) = x$$

Bem.: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$