Repetitions-Aufgaben 2 Funktionen

Aufgaben

R2.1 Gegeben ist die folgende Funktion f:

$$f: \quad A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x) = x^2+1$$

Bestimmen Sie

a) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

b) $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)-3\right)$

c) $f\left(x^2+1\right)$

R2.2 Der Graf einer linearen Funktion f hat die Steigung -2 und enthält den Punkt P(-3|5).
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) = ...

R2.3 Gegeben ist die folgende Funktion f:

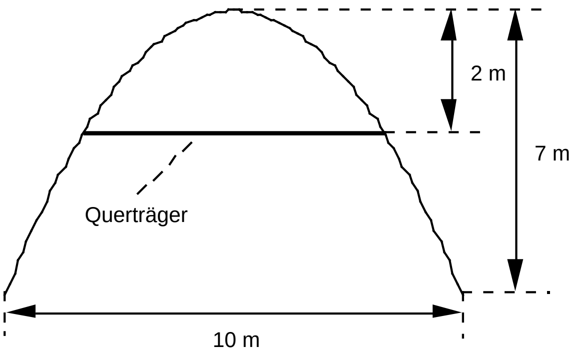
$$f: \quad R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow y = f(x) = (k-x)(x-2) - k(x^2-2) - 1 \quad (k \quad R)$$

Bestimmen Sie, für welche Werte von k die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt.

R2.4 Eine Parabel in der x-y-Ebene liegt achsensymmetrisch zur y-Achse, geht durch den Koordinatenursprung und durch den Punkt P(1|2).

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

R2.5 Eine Decke hat einen parabelförmigen Querschnitt mit den folgenden Abmessungen:



2 m unter dem höchsten Punkt soll ein Querträger eingebaut werden.

Bestimmen Sie die Länge des Querträgers.

R2.6 Beurteilen Sie mit schlüssigen Begründungen, welche der folgenden fünf Zuordnungen f_1 bis f_5 Funktionen sind:

a) $f_1 : R_0^+ \rightarrow R^+, x \rightarrow y = f_1(x) = \sqrt{x}$

b) $f_2 : \{2,3,4,...\} \rightarrow N, x \rightarrow y = f_2(x) = x - 1$

c) f_3 : Menge aller Schweizer Kantone $\rightarrow$ Menge aller Schweizer Orte
$x \rightarrow y = f_3(x) =$ Hauptort von x

d) $f_4 : \{x \quad R \mid x \geq 3\} \rightarrow R, x \rightarrow y = f_4(x) = \frac{1}{x^2-9}$

e) $f_5 : R \rightarrow R, x \rightarrow y = f_5(x) = \sin(x)$

R2.7 Gegeben sind die beiden Funktion f und g:

f: $R \rightarrow R, x \rightarrow y = f(x) = 2x^2+4x+1$

g: $R \rightarrow R, x \rightarrow y = g(x) = ax + \frac{1}{2}$ $(a \quad R \setminus \{0\})$

Für welche(n) Wert(e) von a berühren sich die Grafen von f und g?

R2.8 Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = f_1(x) = ...$ einer quadratischen Funktion f_1.

Der Graf von f soll nun um 2 Einheiten in die positive x-Richtung und um 3 Einheiten in die positive y-Richtung verschoben werden. Man erhält so den Grafen einer neuen Funktion f_2.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = f_2(x)$ dieser neuen Funktion f_2.

a) $y = f_1(x) = x^2$

b) $y = f_1(x) = - 3x^2 + 4x - 1$

R2.9 Gegeben ist die Funktion f: $R \rightarrow R, x \rightarrow f(x) = - 2x^2 + 4x + 3$.

a) Bestimmen Sie von Hand die Koordinaten des Scheitelpunktes des Grafen von f.

b) Der Graf von f wird verschoben und zwar um 5 Einheiten nach rechts und zugleich 6 Einheiten nach oben.
Geben Sie die Gleichung der verschobenen Kurve in der Form $y = ax^2+bx+c$ an.

c) Für welche Werte von m ist die Gerade $y = mx + \frac{15}{2}$ eine Tangente an den Grafen von f?

R2.10 Gegeben ist die folgende Funktion f:

f: $R^- \rightarrow \{y \quad R \mid y>-1\}$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2 - 1$

a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

R2.11 Gegeben ist die Funktion f: $A \rightarrow R, x \rightarrow y = f(x) = \log_2\left(\sqrt{x+1}\right) + 3 \log_2\left(\sqrt{x-1}\right) - \log_2\left(\sqrt{x^2+1}\right) - 2$

a) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von R.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) von f.

R2.12 Gegeben ist die Funktion $f: A \rightarrow B,\ x \rightarrow\ y = f(x) = \ldots$

i) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass f bijektiv wird.

ii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der (nun bijektiven) Funktion f.

Hinweis:
Skizzieren Sie die Grafen von f und f^{-1}.

a) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

b) $f(x) = 2(x-1)^7 + 3$

c) $f(x) = (x+1)^{-12}$

d) $f(x) = 3\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x) = \ln(x^2-1)$

R2.13 Eine sogenannte **arithmetische** Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ ist eine Zahlenfolge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder immer gleich gross ist:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = d \text{ , d.h. } a_{n+1} - a_n = d = \text{konst. für alle } n \quad N$$

Eine sogenannte **geometrische** Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ ist eine Zahlenfolge, bei der der Quotient aufeinanderfolgender Folgenglieder immer gleich gross ist:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = q \text{ , d.h. } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{konst. für alle } n \quad N$$

a) Bestimmen Sie das Bildungsgesetz $a_n = \ldots$

i) der arithmetischen Zahlenfolge mit $a_1 = 2$ und $d = 3$.
ii) der geometrischen Zahlenfolge mit $a_1 = 2$ und $q = 3$.

b) Wie lautet allgemein das Bildungsgesetz einer

i) arithmetischen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$?
ii) geometrischen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$?

R2.14 Ein Kapital K_0 = 10'000 Fr. wird auf einem Bankkonto zu einem Zinssatz p_z = 3 % angelegt.
Am Ende jedes Jahres wird der Jahreszins zum Kapital addiert. Der Jahreszins wird jedoch mit einer Verrechnungssteuer mit dem Steuersatz p_v = 35 % besteuert. Die Verrechnungssteuer wird am Ende jedes Jahres direkt vom Kapital subtrahiert.

a) Wie gross ist die Verrechnungssteuer V_n für das n-te Anlagejahr?
Drücken Sie V_n allgemein algebraisch durch die Platzhalter K_0, p_z, p_v, n aus.

b) Nehmen Sie nun an, der Zins und die Verrechnungssteuer würden monatlich statt jährlich abgerechnet.
Wieviele % mehr oder weniger würde bei der monatlichen Abrechnung Ende Jahr auf dem Konto liegen gegenüber der üblichen jährlichen Abrechnung?

R2.15 Aus der Physik ist bekannt, dass die Intensität von Licht beim Durchdringen von Glas exponentiell abnimmt.

Angenommen, Licht verliert beim Durchdringen einer bestimmten Glasplatte 5% seiner Intensität.

a) Wieviel % seiner Intensität verliert das Licht beim Durchgang durch 20 solcher Glasplatten?

b) Wieviele Glasplatten braucht es, bis die Intensität nur noch 1% beträgt?

Lösungen

R2.1 a) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$

b) $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)-3\right) = 1$

c) $f\left(x^2+1\right) = x^4 + 2x^2 + 2$

R2.2 $f(x) = -2x - 1$

R2.3 $k_1 = 0$, $k_2 = -1$

R2.4 $y = 2x^2$

R2.5 h := 7 m
b := 10 m
d := 2 m
L := Länge Querträger

$L = \sqrt{\frac{d}{h}} \cdot b = 5.35$ m

R2.6 a) keine Funktion

b) Funktion

c) Funktion

d) keine Funktion

e) Funktion

R2.7 $a_1 = 2$, $a_2 = 6$

R2.8 a) $y = f_2(x) = (x-2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 7$

b) $y = f_2(x) = -3(x-2)^2 + 4(x-2) - 1 = -3x^2 + 16x - 21$

R2.9 a) S (1 | 5)

b) $y = -2x^2 + 24x - 61$

c) $m_1 = 10$, $m_2 = -2$

R2.10 a) ...

b) f^{-1}: $\{y \quad R \mid y>-1\} \rightarrow R^-$, $y \rightarrow x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y+1}$

R2.11 a) $A = \{x \quad R \mid x>1\}$

b) 1 Nullstelle bei x = 5

R2.12 a) i) $A = \{x \;\; \mathrm{R} \mid x \geq -2\}$ $B = \{y \;\; \mathrm{R} \mid y \leq 1\}$

ii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to \ y = f^{-1}(x) = \sqrt{-x+1} - 2$

b) i) $A = \mathrm{R}$ $B = \mathrm{R}$

ii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to \ y = f^{-1}(x) = \sqrt[7]{\frac{x-3}{2}} + 1$

c) i) $A = \{x \;\; \mathrm{R} \mid x > -1\}$ $B = \mathrm{R}^{+}$

ii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to \ y = f^{-1}(x) = \sqrt[12]{\frac{1}{x}} - 1$

d) i) $A = \left\{x \;\; \mathrm{R} \mid -\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}\right\}$ $B = \{y \;\; \mathrm{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$

ii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to \ y = f^{-1}(x) = \dfrac{\arccos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{2}}{4} = -\dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\pi}{2}}{4}$

e) i) $A = \{x \;\; \mathrm{R} \mid x > 1\}$ $B = \mathrm{R}$

ii) $f^{-1}: B \to A,\ x \to \ y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x}+1}$

R2.13 a) i) $a_n = 2 + (n-1)3$

ii) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

b) i) $a_n = a_1 + (n-1)d$

ii) $a_n = a_1\, q^{n-1}$

R2.14 a) $V_n = K_0 p_v p_z \left(1 + p_z(1-p_v)\right)^{n-1}$

b) 0.017% mehr

R2.15 a) 64%

b) 90 Platten