

Aufgaben 17 Anwendungen der Differentialrechnung Steigen, Fallen, Krümmung, Relative Extremstellen, Wendepunkte

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen der ersten Ableitung einer Funktion und dem Steigen und Fallen des Grafen der Funktion anwenden können.
- den Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung einer Funktion und dem Krümmungsverhalten des Grafen der Funktion anwenden können.
- relative Maxima, relative Minima und Wendepunkte einer einfacheren Funktion von Hand bestimmen können.

Aufgaben

Steigen, Fallen, Krümmung

17.1 Papula 1: 415/6 (392/6), 415/7 (392/7), 416/8 (393/8), 418/6 (395/5),
 418/7 (395/6) (Grösse von Krümmung und Krümmungsradius weglassen)

17.2 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2 :

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_1(x) = -(x-1)^2 + a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_2(x) = x^2 + 2$$

Bestimmen Sie den Wert von a , damit sich die Grafen der beiden Funktionen in einem Punkt berühren.

17.3 Der Graf einer linearen Funktion f_1 berührt den Grafen der Funktion $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_2(x) = e^{-x}$ bei $x = a$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion f_1 .

17.4 Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$.

Die Parabel soll im kartesischen Koordinatensystem so weit parallel zur y -Achse verschoben werden, bis sie den Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius 2 in zwei Punkten berührt.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte sowie die Gleichung der verschobenen Parabel.

Relative Extremstellen, Wendepunkte

17.5 Papula 1: 419/11 (396/10), 419/12 (396/11), 419/14 (396/13), 419/15 (396/14), 420/17 (396/15)

17.6 Papula 1: 420/24 (397/22), 421/25 (397/23)

Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen, relativen Maxima und Minima, Wende- und Sattelpunkte.

17.7 Gegeben ist eine Funktion f mit einem unbekanntem Parameter a :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - ax^2)$$

Bestimmen Sie von Hand ...

- ... den Wert von a , damit f an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt hat.
- ... alle relativen Extremstellen und Wendepunkte der Funktion f . Der Parameter a soll den in a) bestimmten Wert haben.

Lösungen

17.1 siehe Papula 1

17.2 $a = \frac{5}{2}$

17.3 $f_1(x) = -e^{-a} x + (1+a) e^{-a}$

17.4 Berührungspunkte: $P_1(-\sqrt{3} \mid -1)$, $P_2(\sqrt{3} \mid -1)$
Verschobene Parabel: $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2}$

17.5 siehe Papula 1

17.6 siehe Papula 1

17.7 a) $a = 6$

b) Relatives Maximum: $x_1 = 0$
Relative Minima: $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$
Wendepunkte: $x_4 = -1$, $x_5 = 1$