Aufgaben 9 — Funktionstypen
Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Gebrochenrationale Funktion

Lernziele

- den Grafen einer Potenz-, Wurzelfunktion skizzieren können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Potenz-, Wurzelfunktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven Potenz-, Wurzelfunktion bestimmen können.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- charakteristische Eigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

Potenzfunktion, Wurzelfunktion

9.1 Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen der folgenden Potenz- bzw. Wurzelfunktionen:

a) $f: R \to R, x \to y = f(x) = x^n$ für n = 2, 3, 4 und 5.

b) $f: R\backslash\{0\} \to R, x \to y = f(x) = x^{-n}$ für n = 1, 2, 3 und 4.

c) $f: R^+ \to R, x \to y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ für n = 2, 3, 4 und 5.

9.2 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten:

$f: A \to B, x \to y = f(x) = x^n \quad n \quad N$

a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f in Abhängigkeit von n für A = B = R.

b) Wählen Sie für A und B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass die Funktion f bijektiv wird.

c) Bestimmen Sie für n = 2, 3 und 4 die Umkehrfunktion f^{-1}: $B \to A, x \to y = f^{-1}(x)$.

d) Skizzieren Sie für n = 2, 3 und 4 die Grafen von f und f^{-1}.

9.3 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten:

$f: R^+ \to R, x \to y = f(x) = x^{m/n} \quad m \quad Z, n \quad N\backslash\{1\}$

a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

b) Beurteilen Sie, ob und gegebenenfalls wie man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich von f einschränken müsste, damit f bijektiv wird.

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: $\ldots \to \ldots, x \to y = f^{-1}(x)$.

9.4 Betrachten Sie die Potenzfunktionen

$f: R \to R, x \to y = f(x) = a(x-x_0)^n + y_0 \quad n \quad N, a \quad R\backslash\{0,1\}, x_0 \quad R\backslash\{0\}, y_0 \quad R\backslash\{0\}$
$g: R\backslash\{x_0\} \to R, x \to y = g(x) = a(x-x_0)^{-n} + y_0 \quad n \quad N, a \quad R\backslash\{0,1\}, x_0 \quad R\backslash\{0\}, y_0 \quad R\backslash\{0\}$

Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen von f und g. Unterscheiden Sie dabei die Fälle n gerade und n ungerade.

Hinweis:
Gehen Sie von den Grafen aus, die Sie in der Aufgabe 9.1 skizziert haben.

Gebrochenrationale Funktion

9.5 Betrachten Sie die allgemeine gebrochenrationale Funktion

$$f: A \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0} \qquad m,\ n \quad N_0,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

a) Geben Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von R an.

b) Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer echt oder unecht gebrochenrationalen Funktion.

Lösungen

9.1 a) ...

b) ...

c) ...

9.2 a) n ungerade: f injektiv, f surjektiv   f bijektiv
n gerade: f nicht injektiv, f nicht surjektiv   f nicht bijektiv

b) n ungerade: $A = B = R$
n gerade: $A = B = R_0^+$ oder $A = B = R_0^-$

c) n = 2: $f^{-1}: R_0^+ \to R_0^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
oder
$f^{-1}: R_0^- \to R_0^-,\ x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

n = 3: $f^{-1}: R \to R,\ x \to y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x < 0) \end{cases}$

n = 4: $f^{-1}: R_0^+ \to R_0^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
oder
$f^{-1}: R_0^- \to R_0^-,\ x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$

d) ...

9.3 a) f injektiv, f nicht surjektiv   f nicht bijektiv

b) Definitionsbereich = Zielbereich = R^+

c) $f^{-1}: R^+ \to R^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = x^{n/m}$

9.4 ...

9.5 a) $A = R\backslash\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, wobei $x_1, x_2, ..., x_N$ die N Nullstellen des Nennerpolynoms sind ($N \leq n$)

b) ...