

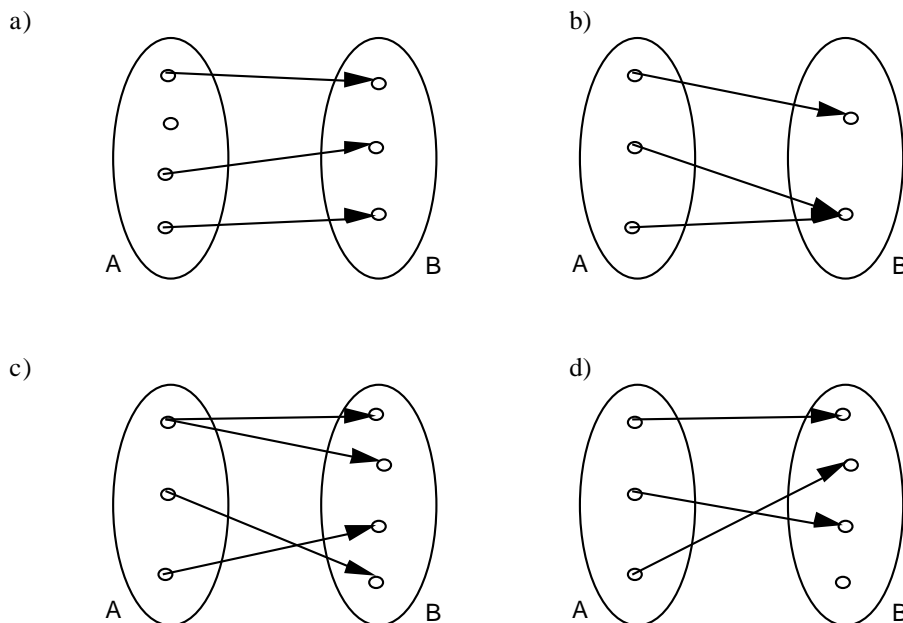
Aufgaben 4 Funktionen Grundbegriffe, Zusammengesetzte Funktion

Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- zwei gegebene Funktionen zu einer einzigen Funktion zusammensetzen können.
- eine gegebene Funktion als Zusammensetzung zweier Funktionen darstellen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

4.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \rightarrow B$ ist:



- e) $A =$ Menge aller Häuser, $B =$ Menge aller Architekten/-innen
 $f: A \rightarrow B, h \mapsto a = f(h) =$ Architekt/-in von h
- f) $A =$ Menge aller Vereine in der Schweiz, $B =$ Menge aller Schweizer/-innen
 $p: A \rightarrow B, x \mapsto y = p(x) =$ Präsident/-in von x
- g) $A = \{1979, 1980, \dots, 1988, 1989\}$
 $B =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $f: A \rightarrow B, j \mapsto m = f(j) =$ Mensch mit Jahrgang j
- h) $A =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $B = \{1979, 1980, \dots, 1988, 1989\}$
 $j: A \rightarrow B, m \mapsto j = j(m) =$ Jahrgang von Mensch m
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2$
- j) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) =$ Zahl, welche quadriert gleich x ergibt
- k) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto y = f(x) =$ Ganzzahliger Teiler von x

4.2 Gegeben sind die Mengen A und B.

Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \rightarrow B$.

- i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
- ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
- iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.

a) $A =$ Menge aller Tage des Jahres 2009
 $B = \mathbb{R}$

b) $A =$ Menge aller Schweizer Firmen
 $B =$ Menge aller Schweizer Kantone

c) $A =$ Menge aller Vierecke
 $B =$ Menge aller Dreiecke

d) $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$
 $B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$

e) $A = \mathbb{R}^-$
 $B = \mathbb{R}^+$

4.3 Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

a) $A = \{\text{Januar, Februar, März, ..., Dezember}\}$
 $B = \{A, B, C, \dots, Z\}$
 $f: A \rightarrow B, m \mapsto b = f(m) =$ Anfangsbuchstabe des Monats m

b) $A =$ Menge aller Nachbarländer der Schweiz
 $B =$ Menge aller europäischen Städte
 $h: A \rightarrow B, n \mapsto s = h(n) =$ Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) $A = \mathbb{R}$
 $B = \mathbb{R}_0^+$
 $b: A \rightarrow B, x \mapsto y = b(x) = |x|$

d) Funktion f aus Aufgabe 4.1 h)

e) Funktion f aus Aufgabe 4.1 i)

4.4 Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- i) $f(0)$
- ii) $f(1)$
- iii) $f(-1)$
- iv) $f(a)$
- v) $f(x+a)$

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

4.5 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = -2y$

- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = \frac{y}{y^2+1}$
- c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto y = f(x) = \frac{2}{x+1}$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 $g = f$
- e) $A =$ Menge aller Studierenden der HTW Chur
 $B =$ Menge aller Länder der Erde
 $C = \mathbb{N}$ (= Menge aller natürlichen Zahlen)
 $f: A \rightarrow B, s \mapsto l = f(s) =$ Herkunftsland des Studierenden s
 $g: B \rightarrow C, l \mapsto e = g(l) =$ Einwohnerzahl des Landes l

4.6 Gegeben ist die Funktion h .

Fassen Sie die Funktion h als zusammengesetzte Funktion auf, d.h. $h = g \circ f$, und geben Sie die beiden Funktionen f und g an.

- a) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = e^{-2x}$
- b) $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = (x-1) \cdot \sin(2x)$
- c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = x$
- d) $A =$ Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden
 $C =$ Menge aller Tage eines Jahres
 $h: A \rightarrow C, t \mapsto d = h(t) =$ Osterdatum im Einweihungsjahr des Autobahntunnels t

4.7 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt: $g \circ f = f \circ g$

Hinweis:

Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 4.5 und 4.6.

Lösungen

- 4.1
- a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle $a \in A$)
 - b) Funktion
 - c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)
 - d) Funktion
 - e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle $h \in A$)
 - f) keine Funktion (p nicht definiert für alle $x \in A$)
 - g) keine Funktion (f nicht eindeutig)
 - h) Funktion
 - i) Funktion
 - j) keine Funktion (f nicht eindeutig)
 - k) keine Funktion (f nicht eindeutig)
- 4.2
- a)
 - i) $m: A \rightarrow B, d \in T = m(d) = \text{Maximaltemperatur in Chur am Tag } d$
 - ii) ...
 - iii) ...
 - b)
 - i) $s: A \rightarrow B, f \in k = s(f) = \text{Kanton, an welchen } f \text{ die meisten Steuern zahlen muss}$
 - ii) ...
 - iii) ...
 - c)
 - i) $f: A \rightarrow B, v \in d = f(v) = \text{gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie } v$
 - ii) ...
 - iii) ...
 - d)
 - i) $f: A \rightarrow B, x \in y = f(x) = 2x$
 - ii) ...
 - iii) ...
 - e)
 - i) $f: A \rightarrow B, x \in y = f(x) = -x$
 - ii) ...
 - iii) ...
- 4.3
- a) $W = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$
 - b) $W = \{\text{Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}\}$
 - c) $W = B$
 - d) $W = B$
 - e) $W = \mathbb{R}_0^+$
- 4.4
- a)
 - i) $f(0) = 0^3 - 0 = 0$
 - ii) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
 - iii) $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$
 - iv) $f(a) = a^3 - a$
 - v) $f(x+a) = (x+a)^3 - (x+a)$
 - b)
 - i) $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$
 - ii) $f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
 - iii) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+1}$ nicht definiert

iv) $f(a) = \frac{a^2}{a+1}$
v) $f(x+a) = \frac{(x+a)^2}{x+a+1}$

- 4.5 a) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2x^2$
b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+1}$
c) $h: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$
d) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z = h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^2}$
e) $h: A \rightarrow C, s \mapsto e = h(s) = (g \circ f)(s) = g(f(s)) = \text{Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden } s$

- 4.6 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = -2x$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = e^y$
b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto y = f(x) = x-1$
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = y \cdot \sin(2(y+1))$
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 2x$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z = g(y) = \frac{y}{2}$
d) $B = \text{Menge aller Jahre von 1900 bis heute}$
 $f: A \rightarrow B, t \mapsto j = f(t) = \text{Einweihungsjahr des Autobahntunnels } t$
 $g: B \rightarrow C, j \mapsto d = g(j) = \text{Osterdatum im Jahr } j$

4.7 ...