Aufgaben 3 Vektoren Vektorprodukt

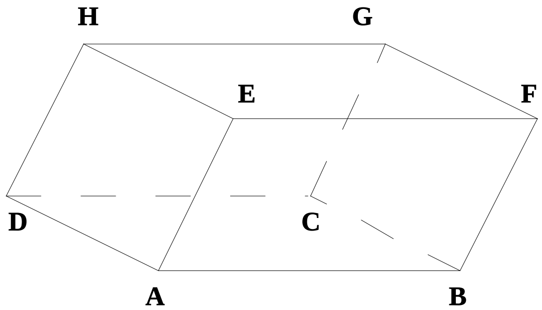
Lernziele

- das Vektorprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Vektorproduktes anwenden können.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

3.1 Papula 1: 139/23 (131/23), 139/24 (131/24), 139/26 (132/26)

3.2 Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird.

3.3 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Überlegen Sie sich, wie viele Einheitsvektoren es gibt, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht stehen.

b) Bestimmen Sie diese Einheitsvektoren.

3.4 Eine Pyramide bestehe aus der Basis ABC und der Spitze S:

A(2|4|-7) B(3|4|-9) C(-1|-5|5) S(8|4|8)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der über S hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von S den Abstand 7 hat.

3.5 Papula 1: 140/29 (132/29)

Lösungen

3.1 siehe Papula 1

zu 139/26 (132/26): Das Spatprodukt $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ gehört nicht zu den Lernzielen des Unterrichts. Damit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen, muss das Vektorprokukt von zwei der drei Vektoren senkrecht zum dritten Vektor stehen, also z.B. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

3.2 $A_{\Delta BDG} = \frac{1}{2}\left|\vec{BD} \times \vec{BG}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{608} = 12.3...$

3.3 a) 2 Einheitsvektoren

b) $\vec{x} = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
$|\vec{x}| = 1$

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3.4 $\vec{SP}$ steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von $\vec{AB} \times \vec{AC}$ und hat Betrag 7

$\vec{SP} = k \cdot \left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right)$
$\left|\vec{SP}\right| = 7$
$\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP}$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad P(14|6|11)$$

3.5 siehe Papula 1