Aufgaben 1 Vektoren
Definition, Grundbegriffe, Grundoperationen

Lernziele

- einen Vektor korrekt kennzeichnen bzw. schreiben können.
- wissen, was ein Gegenvektor ist.
- wissen, wie die Addition zweier Vektoren definiert ist.
- wissen, wie die Subtraktion zweier Vektoren definiert ist.
- wissen, wie die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl definiert ist.
- wissen, wie Vektoren analytisch, d.h. durch Komponenten beschrieben werden.
- einen Vektor korrekt mit Komponenten schreiben können.
- wissen, was der Betrag eines Vektors ist.
- Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, addieren, subtrahieren, mit Zahlen multiplizieren und deren Betrag bestimmen können.
- wissen, was ein Nullvektor, Einheitsvektor, Ortsvektor ist.
- die Grundoperationen der Vektorrechnung zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

1.1 Setzen Sie sich zu Dritt zusammen, und versuchen Sie, die folgenden Fragen ohne Hilfsmittel zu beantworten:

a) Wie addiert man zwei Vektoren (geometrisch, d.h. unabhängig von Komponenten)?

b) Was ist ein Gegenvektor?

c) Wie subtrahiert man zwei Vektoren (geometrisch, d.h. unabhängig von Komponenten)?

d) Wie multipliziert man einen Vektor mit einer Zahl (geometrisch, d.h. unabhängig von Komponenten)?

e) Was ist ein Nullvektor?

f) Was sind die Komponenten eines Vektors?

g) Was ist der Betrag eines Vektors?
Wie bestimmt man den Betrag eines Vektors?

h) Was ist ein Einheitsvektor?

i) Was ist ein Ortsvektor?

1.2 Gegeben sind zwei Punkte P und Q.

i) Zeichnen Sie die beiden Punkte P und Q sowie den Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ in einem kartesischen Koordinatensystem ein.

ii) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

a) P(-2|5) , Q(1|-1) b) P(3|-1|0) , Q(0|-1|3)

1.3 Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist ein Pfeil, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet."

1.4 Zeichnen Sie drei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf ein Blatt. Die drei Vektoren sollen verschiedene Richtungen und verschiedene Längen aufweisen.

Bestimmen Sie zeichnerisch die folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} + \vec{a}$ c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$

1.5 Gegeben sind die drei folgenden Vektoren:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{p} + \vec{q}$ b) $\vec{r} + \vec{q}$ c) $\vec{q} + \vec{r} + \vec{p}$

1.6 Zeichnen Sie drei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf ein Blatt. Die drei Vektoren sollen verschiedene Richtungen und verschiedene Längen aufweisen.

Bestimmen Sie zeichnerisch die folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{c} - \vec{a}$ c) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$

1.7 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$.

1.8 Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ und die Zahl k:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; k = -3$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $k \cdot \vec{a}$.

1.9 Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + 2\,\vec{b} - \frac{1}{2}\,\vec{c}$

1.10 Bei der Muliplikation eines Vektors mit einer Zahl gelten die folgenden Rechenregeln (ohne Beweis):

i) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$

ii) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

iii) $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

a) Veranschaulichen Sie sich die drei Rechenregeln, indem Sie für k bzw. k_1 und k_2 konkrete Zahlenwerte einsetzen.

b) Drücken Sie die drei Rechenregeln in Worten aus.
Versuchen Sie also, die durch die drei Formeln ausgedrückten Sachverhalte je in Form eines deutschen Satzes wiederzugeben.

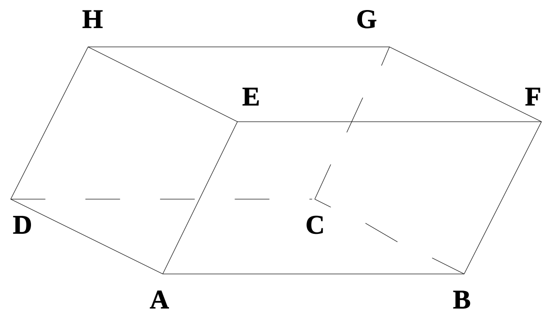
c) * Beweisen Sie die drei Rechenregeln.
Vergleichen Sie dazu jeweils die Komponenten des Vektors auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit den Komponenten des Vektors auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

1.11 Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD mit $\vec{AB} = \vec{a}$ und $\vec{AD} = \vec{b}$.

Drücken Sie die folgenden Vektoren als Kombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:

a) $\vec{AC}$ b) $\vec{CB}$ c) $\vec{BD}$

1.12 Gegeben ist der Spat ABCD/EFGH durch A(3|-1|2), B(2|1|5), D(-1|2|-4) und E(5|4|0).
Zudem gelte $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ und $\vec{AE} = \vec{c}$.



a) Drücken Sie die folgenden Vektoren als Kombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus (ohne Komponenten):

i) $\vec{HC}$ ii) $\vec{GM_{AC}}$ iii) $\vec{HM_{BF}}$

b) Bestimmen Sie die Komponenten der in a) aufgeführten Vektoren.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes G.

1.13 Finden Sie x, y und z, so dass gilt:

a) $\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x+y \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.14 Von einem Parallelogramm sind die Koordinaten von drei aufeinander folgenden Eckpunkte A, B, C gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes D.

a) A(8|-5) B(-1|-4) C(0|4)

b) A(-1|8|2) B(4|5|-1) C(2|7|1)

1.15 Bestimmen Sie x so, dass die Punkte A(5|-6), B(-7|-3) und C(x|5) auf einer Geraden liegen.

1.16 Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Wert der Komponente k, damit die folgenden beiden Vektoren parallel sind:

a) $2\,\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\,\vec{c} - 4\,\vec{d}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ k \end{pmatrix}$

b) $3\,\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\,\vec{c} - 3\,\vec{d}$ und $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen

1.1 ...

1.2 a) i) ...

ii) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) i) ...

ii) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ -1-(-1) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.3 falsch.

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Menge aller Pfeile, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben wie der Pfeil, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet.

1.4 ...

1.5 a) $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+1 \\ 3+5 \\ -12+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -18 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+1 \\ 5+5 \\ 0+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{q} + \vec{r} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-6)+(-6) \\ 5+5+3 \\ -6+0+(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -18 \end{pmatrix}$

1.6 ...

1.7 $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

1.8 $k \cdot \vec{a} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$

1.9 $\vec{d} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.10 a) i) $2 \cdot (3 \cdot \vec{a}) = 6 \cdot \vec{a}$, $4 \cdot ((-2) \cdot \vec{a}) = -8 \cdot \vec{a}$, ...

ii) $4 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 4 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b}$, $(-2) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-2) \cdot \vec{a} + (-2) \cdot \vec{b}$, ...

iii) $(5 + 6) \cdot \vec{a} = 5 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{a}$, $(3 - 5) \cdot \vec{a} = 3 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{a}$, ...

b) i) Wird ein Vektor nacheinander mit zwei Zahlen multipliziert, so darf man zuerst die beiden Zahlen multiplizieren und dann das Produkt der beiden Zahlen mit dem Vektor multiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit dem Produkt einer anderen Zahl und einem Vektor ist gleich dem Produkt des Produktes der beiden Zahlen mit dem Vektor.

ii) Ein Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der Zahl mit den einzelnen Vektoren.

iii) Das Produkt der Summe zweier Zahlen mit einem Vektor darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Summe zweier Zahlen mit einem Vektor ist gleich der Summe der Produkte der einzelnen Zahlen mit dem Vektor.

c) * (siehe Seite 5)

c) * i) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = k_1 \cdot \begin{pmatrix} k_2 \cdot a_1 \\ k_2 \cdot a_2 \\ \ldots \\ k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot (k_2 \cdot a_1) \\ k_1 \cdot (k_2 \cdot a_2) \\ \ldots \\ k_1 \cdot (k_2 \cdot a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 \cdot k_2) \cdot a_1 \\ (k_1 \cdot k_2) \cdot a_2 \\ \ldots \\ (k_1 \cdot k_2) \cdot a_n \end{pmatrix} = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$

ii) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \ldots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot (a_1+b_1) \\ k \cdot (a_2+b_2) \\ \ldots \\ k \cdot (a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 + k \cdot b_1 \\ k \cdot a_2 + k \cdot b_2 \\ \ldots \\ k \cdot a_n + k \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \ldots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot b_1 \\ k \cdot b_2 \\ \ldots \\ k \cdot b_n \end{pmatrix}$

$= k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

iii) $(k_1+k_2) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} (k_1+k_2) \cdot a_1 \\ (k_1+k_2) \cdot a_2 \\ \ldots \\ (k_1+k_2) \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_1 \\ k_1 \cdot a_2 + k_2 \cdot a_2 \\ \ldots \\ k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot a_1 \\ k_1 \cdot a_2 \\ \ldots \\ k_1 \cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \cdot a_1 \\ k_2 \cdot a_2 \\ \ldots \\ k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

1.11 a) $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{CB} = - \vec{b}$
c) $\vec{BD} = - \vec{a} + \vec{b}$

1.12 a) i) $\vec{HC} = \vec{a} - \vec{c}$
ii) $\vec{GM}_{AC} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
iii) $\vec{HM}_{BF} = \vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

b) i) $\vec{HC} = \vec{AB} - \vec{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{GM}_{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -15/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{HM}_{BF} = \vec{AB} - \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FG} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD}$
$= \vec{OA} + \left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OE} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OD} - \vec{OA}\right)$

$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$		G(0|9|-3)

1.13 a) x = 2, y = 1
b) x = 2, y = 3, z = - 2

1.14 $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OA} + \left(\vec{OC} - \vec{OB}\right)$

a) $\vec{OD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$		D(9|3)

b) $\vec{OD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$		D(-3|10|4)

1.15 Der Vektor $\vec{AB}$ muss ein Vielfaches des Vektors $\vec{BC}$ sein.
x = - 39

1.16 Der eine Vektor muss ein Vielfaches des anderen Vektors sein.
a) k = 6
b) k = 2