Übung 23 Anwendungen der Integralrechnung Flächeninhalt

Lernziele

- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der Abszisse mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf des Stromes einer mengenartigen Grösse die in einer bestimmten Zeitspanne geflossene Menge mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf der Änderungsrate einer Grösse die Änderung der Grösse in einer bestimmten Zeitspanne mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.

Aufgaben

1. Die Stärke des Volumenstromes in einem Rohr habe den folgenden zeitlichen Verlauf:

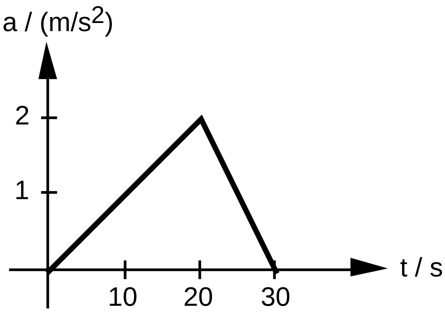
   $I_V(t) = a \cdot t^2$ mit $a = 0.003\ m^3/s^3$

   Bestimmen Sie das Flüssigkeitsvolumen V_a, welches zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 10$ s und $t_2 = 20$ s durch das Rohr geflossen ist.

2. Die Stärke des elektrischen Ladungsstromes I_Q in einem Kupferdraht sinkt innert 5 Sekunden exponentiell von 2 Ampère auf 1 Ampère ab.

   Bestimmen Sie die Ladungsmenge Q_a, welche in den 5 Sekunden durch den Draht geflossen ist.

3. Ein am Anfang ruhendes Fahrzeug wird während 30 Sekunden beschleunigt. Die folgende Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung a:



   a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, welche das Fahrzeug nach den 30 Sekunden erreicht hat.

   b) Fassen Sie die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t auf, also $v: t \rightarrow v = v(t)$.
   Stellen Sie v sowohl analytisch (Funktionsgleichung) als auch grafisch (v-t-Diagramm) für die Zeitspanne $0s \leq t \leq 30s$ dar.

   c) Bestimmen Sie die Strecke, die das Fahrzeug während den 30 Sekunden gefahren ist.

4. Papula: 535/4

5. Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden folgenden Kurven:

   Kurve 1: $y = 8x^3 - 23x^2 + 3x$ Kurve 2: $y = 9x^2 - 21x$

6. Papula: 535/5, 535/6, 535/7, 535/9

Lösungen

1. V_a = Fläche im I_V-t-Diagramm = $\int_{t_1}^{t_2} I_V(t)\,dt = \frac{a}{3}(t_2^3 - t_1^3) = 7\ m^3$

2. Q_a = Fläche im I_Q-t-Diagramm = $\int_0^5 I_Q(t)\,dt$

   $I_Q(t) = I_{Q0} \cdot e^{-kt}$

   $Q_a = 7.2$ C (Coulomb)

3. a) $v(30s) = v(0s) + \Delta v$

   Δv = Fläche im a-t-Diagramm = $\int_0^{30} a(t)\,dt = 30$ m/s

   $v(30s) = 0$ m/s + 30 m/s = 30 m/s

   b) $v(t) = v(0s) + \Delta v$

   Δv = Fläche im a-t-Diagramm (im Intervall [0s,t]) = $\int_0^t a(\tau)\,d\tau$

   $$a(t) = \begin{cases} \frac{t}{10} & (0s \le t \le 20s) \\ -\frac{t}{5} + 6 & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

   $$v(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{20} & (0s \le t \le 20s) \\ -\frac{t^2}{10} + 6t - 60 & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

   c) Δs = Fläche im v-t-Diagramm = $\int_0^{30} v(t)\,dt = 400$ m

4. siehe Papula

5. $A = \frac{74}{3}$

6. siehe Papula