Übung 15 Ableitung
Ableitung einer Funktion, Ableitung von Grundfunktionen

Lernziele

- die Ableitung einer einfachen Funktion direkt aus der Definition der Ableitung von Hand bestimmen können.
- die Ableitung einer Grundfunktion mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle bestimmen können.
- den Zusammenhang zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion verstehen.

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Funktion $f: A \to R,\ x \to y = f(x),\ A \quad R$

   Bestimmen Sie die Ableitung f' von f **direkt**, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten von Hand bestimmen.

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

   a) $f(x) = x^3$

   b) $f(x) = mx + q \quad (m \quad R,\ q \quad R)$

   c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Funktion $f: A \to R,\ x \to y = f(x),\ A \quad R$

   Bestimmen Sie die Ableitung f' von f **mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle** (Buch Papula: Tabelle 1, Seiten 313 und 314).

   a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x^{a+1}$, $a \quad R$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

   d) $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[7]{x^3}}$ e) $f(x) = x^{1/2}$ f) $f(x) = x^{-5/7}$

   g) $f(x) = 5^x$ h) $f(x) = \log_2(x)$ i) $f(x) = \lg(x)$

3. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

   (1) Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist, dann ist sie an der Stelle x_0 differenzierbar.

   (2) Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist sie an der Stelle x_0 stetig.

Lösungen

1. a) $f'(x) = 3x^2$

   b) $f'(x) = m$

   c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

2. a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = (a+1)x^a$ c) $f'(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

   d) $f'(x) = \frac{32}{7}\sqrt[7]{x^{25}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ f) $f'(x) = -\frac{5}{7}x^{-12/7}$

   g) $f'(x) = \ln(5)\cdot 5^x$ h) $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)\cdot x}$ i) $f'(x) = \frac{1}{\ln(10)\cdot x}$

3. (1) falsch

   (2) wahr