

Übung 14 Grenzwert und Stetigkeit Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit einer Funktion

Lernziele

- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.

Aufgaben

1. Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2 :

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_1(x) = 3x \qquad f_2: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_2(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$$

- a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen f_1 und f_2 .
- b) Beurteilen Sie für beide Funktionen f_1 und f_2 , ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: "Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."
2. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:
- a) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0 ."
- b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."
- c) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0 ."
- d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."
- e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle x_0 ."
- f) "Wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, dann existiert an dieser Stelle x_0 der Grenzwert."
- g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle x_0 definiert."
3. Papula: 298/4, 298/5, 298/6
4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:
- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{2x+3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{5-2x}{2x^2-3x-5}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^2-a^2}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a}}{x}$
5. Papula: 298/8, 298/9

Lösungen

1. a) ...
b) Die Funktionen f_1 und f_2 unterscheiden sich nur an der Stelle $x_0 = 2$:
 f_1 ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_1(2) = 6$.
Der Grenzwert für $x \rightarrow 2$ existiert: $\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = 6$
 f_2 ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
Der Grenzwert für $x \rightarrow 2$ existiert jedoch: $\lim_{x \rightarrow 2} f_2(x) = 6$
2. a) falsch
b) wahr
c) wahr
d) falsch
e) wahr
f) falsch
g) falsch
3. siehe Papula
4. a) $\frac{1}{2}$
b) 0
c) $-\frac{2}{7}$
d) 6
e) $2a$
f) $-\frac{1}{a^2}$
5. siehe Papula