

Übung 13 Grenzwert und Stetigkeit Reelle Zahlenfolgen, Grenzwert einer reellen Zahlenfolge

Lernziele

- aus dem Bildungsgesetz einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgeglieder bestimmen können.
- das Bildungsgesetz einfacherer reeller Zahlenfolgen bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere reelle Zahlenfolge konvergent oder divergent ist.
- den Grenzwert einer einfacheren konvergenten Zahlenfolge bestimmen können.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$:

a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{n^n}$

2. Papula: 297/1

3. Suchen Sie das Bildungsgesetz der folgenden Zahlenfolgen:

a) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \dots$

c) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{8}, \frac{12}{5}, \frac{35}{12}, \frac{24}{7}, \dots$

d) $\langle a_n \rangle = 1, 1, \frac{7}{5}, \frac{15}{7}, \frac{31}{9}, \frac{63}{11}, \frac{127}{13}, \dots$

4. Gegeben ist eine konvergente Folge $\langle a_n \rangle$ und eine positive Zahl ϵ .

Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge und eine natürliche Zahl n_0 so, dass $|a_n - g| < \epsilon$ für $n > n_0$.

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\epsilon = 0.01$

b) $a_n = \frac{3}{n+2}$ $\epsilon = 0.1$

c) $a_n = \frac{2n+1}{4n}$ $\epsilon = 0.01$

d) $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ $\epsilon = 0.01$

5. Papula: 297/3 (zuunterst auf der Seite 297)

6. Beurteilen Sie, ob die folgenden reellen Zahlenfolgen konvergent oder divergent sind.

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert g .

Beurteilen Sie im Falle der Divergenz, ob die Zahlenfolge gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(1-2n)^3}{1+n^3} \right\rangle$

b) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n}{n^2} \right\rangle$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n - 3^{n-1}}{2+3^n} \right\rangle$

d) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{6n-n^2}{5n-4} \right\rangle$

e) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \dots$

f) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$

g) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}, \dots$

h) $\langle a_n \rangle = 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \dots$

Lösungen

1. a) $\langle a_n \rangle = 1, 2, \frac{9}{2}, \frac{32}{3}, \frac{625}{24}, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = 1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{32}, \frac{24}{625}, \dots$

2. siehe Papula

3. a) $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$

d) $a_n = \frac{2^n-1}{2n-1}$

4. a) $g = 0$ $n_0 = 10'001$

b) $g = 0$ $n_0 = 29$

c) $g = \frac{1}{2}$ $n_0 = 26$

d) $g = 0$ $n_0 = 51$

5. siehe Papula

6. a) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = -8$

b) $\langle a_n \rangle$ divergent a_n (n)

c) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = \frac{2}{3}$

d) $\langle a_n \rangle$ divergent a_n - (n)

e) $\langle a_n \rangle$ divergent $a_n /$ (n), $a_n /$ - (n)

f) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = 0$

g) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = 1$

h) $\langle a_n \rangle$ divergent $a_n /$ (n), $a_n /$ - (n)