Übung 12 — Funktionstypen
Logarithmusfunktion, Exp.-/Log.-Gleichungen, Hyperbol. Funktionen

Lernziele

- die Rechenregeln für Logarithmen anwenden können.
- die einfach-logarithmische Darstellung von Exponentialfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die doppelt-logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die Beziehung zwischen Schallintensität und Schallpegel als Beispiel einer Logarithmusfunktion kennen.
- einfachere Exponential- und Logarithmusgleichungen von Hand lösen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

Logarithmusfunktion

1. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

   a) $\log_a(m) + \log_a(n)$ b) $\log_a(m) - \log_a(n)$

   c) $\log_a(b) + \log_a(c) - \big(\log_a(d) + \log_a(e)\big)$ d) $-\log_a(r)$

   e) $\log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z) - \log_a(u) - \log_a(v)$ f) $m \cdot \log_a(x) - n \cdot \log_a(y)$

   g) $\frac{1}{n}\big(\log_a(x) + \log_a(y) - \log_a(z)\big)$ h) $\log_a(a^{1/2}) + \log_a(a^{3/2}) - \log_a(\sqrt{b})$

2. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze als Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen:

   a) $\log_a(pqr)$ b) $\log_a(3xy)$

   c) $\log_a\big(b(c+d)\big)$ d) $\log_a(pq-pr)$

   e) $\log_a(b^3)$ f) $\log_a\left(\frac{1}{c^2}\right)$

   g) $\log_a\big((b+c)^4\big)$ h) $\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\right)$

3. Gegeben ist die Exponentialfunktion

   $f: R \to R,\ x \to y = f(x) = y_0 \cdot a^{kx}$

   a) Betrachten Sie die konkrete Exponentialfunktion mit den folgenden Parameterwerten:

      $y_0 = 5$, $a = 10$, $k = 2$

      i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein einfach-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "x-lg(y)-Darstellung").

      ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(5).

   b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem x-$\log_a(y)$-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_0)$.

4. Gegeben ist die Potenzfunktion

$$f: R \to R,\ x \to y = f(x) = y_1 \cdot x^k$$

a) Betrachten Sie die konkrete Potenzfunktion mit den folgenden Parameterwerten:

$$y_1 = 3\ ,\ k = 2$$

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "lg(x)-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(3).

b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem $\log_a(x)$-$\log_a(y)$-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_1)$.

5. Der Zusammenhang zwischen dem Schallpegel L und der Schallintensität I einer Schallquelle wird durch eine Logarithmusfunktion beschrieben (vgl. Unterricht):

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{wobei: } I_0 := 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \text{ (Hörschwelle)}$$

a) Gegeben sei eine als punktförmige Schallquelle betrachtete Sirene mit der Schallleistung 1000 W.

Bestimmen Sie die Schallintensität und den Schallpegel im Abstand 100 m von der Sirene, falls von Verlusten abgesehen wird.

b) Zeigen Sie, dass der Schallpegel L bei jeder Verdoppelung des Abstandes von der Sirene jeweils um gleich viele Dezibel abnimmt - und zwar unabhängig davon, von welchem Anfangsabstand man ausgeht.

Bestimmen Sie, um wieviel sich der Schallpegel bei jeder Verdoppelung des Abstandes verändert.

Exponential-, Logarithmusgleichungen

6. Papula: 307/12, 307/13

Hyperbolische Funktionen

7. Papula: 307/11

Lösungen

1. a) $\log_a(mn)$ b) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$

   c) $\log_a\left(\frac{bc}{de}\right)$ d) $\log_a\left(\frac{1}{r}\right)$

   e) $\log_a\left(\frac{xyz}{uv}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{x^m}{y^n}\right)$

   g) $\log_a\left(\sqrt[n]{\frac{xy}{z}}\right)$ h) $\log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$

2. a) $\log_a(p) + \log_a(q) + \log_a(r)$ b) $\log_a(3) + \log_a(x) + \log_a(y)$

   c) $\log_a(b) + \log_a(c+d)$ d) $\log_a(p) + \log_a(q-r)$

   e) $3\cdot\log_a(b)$ f) $-2\cdot\log_a(c)$

   g) $4\cdot\log_a(b+c)$ h) $-\frac{3}{2}\log_a(x) + \frac{5}{2}\log_a(y) - 2\log_a(z)$

3. a) i) ...
   ii) ...

   b) $y = y_0\cdot a^{kx}$ | $\log_a(...)$
   $\log_a(y) = \log_a(y_0) + k\cdot x$

4. a) i) ...
   ii) ...

   b) $y = y_1\cdot x^k$ | $\log_a(...)$
   $\log_a(y) = \log_a(y_1) + k\cdot\log_a(x)$

5. a) $I = 8.0\cdot 10^{-3}\ W/m^2$
   $L = 99\ dB$

   b) $\Delta L \approx -6\ dB$

6. siehe Papula

7. siehe Papula