Übung 11 Funktionstypen
Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

Lernziele

- den zeitlichen Velauf einer exponentiell wachsenden oder fallenden Grösse mit einer Exponentialfunktion beschreiben können.
- die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion beurteilen können.
- verstehen, dass jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt werden kann.
- verstehen, dass die relative Änderung einer sich zeitlich exponentiell veränderlichen Grösse in gleichen Zeitbereichen gleich ist.
- einfachere Logarithmen von Hand berechnen können.

Aufgaben

1. Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparkonto einer Bank bei einem jährlichen Zinssatz p angelegt.

   a) Zeigen Sie, dass der zeitliche Verlauf des Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.

   b) Das Anfangskapital sei $K_0 = 1000$ Fr. und der Zinssatz p = 0.5%.
   Bestimmen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

2. Betrachten Sie die Exponentialfunktion

   $f: A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = a^x \qquad a \quad R^+\setminus\{1\},\ A \quad R,\ B \quad R$

   a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f für A = B = R.

   b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass f bijektiv wird.

   c) Skizzieren Sie die Grafen der (nun bijektiven) Funktion f und deren Umkehrfunktion

   $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \ldots$

3. Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab.
   Zu Beginn des Experimentes sind $5.12 \cdot 10^{20}$ radioaktive Atomkerne vorhanden. Nach 5 Stunden hat es noch deren $1.56 \cdot 10^{16}$.

   Bestimmen Sie die Anzahl radioaktiver Atomkerne, welche 8 Stunden nach Beginn des Experimentes noch vorhanden sind.

4. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke von Hand:

a)	$\lg(10)$	b)	$\lg(10'000)$	c)	$\log_2(32)$
d)	$\log_5(125)$	e)	$\ln(e^4)$	f)	$\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
g)	$\log_a(a)$	h)	$\log_a(a^x)$	i)	$\log_a(1)$
j)	$\log_a\left(\sqrt{a}\right)$	k)	$a^{\log_a(x)} \quad (x \quad R^+)$	l)	$e^{-\ln(e/2)}$

5. Der zeitliche Verlauf einer Grösse N, die exponentiell wächst oder fällt, kann mit Hilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt werden:

$N(t) = N_0\, a^t$ wobei: t = Zeit
$N(t)$ = Grösse N zum Zeitpunkt t
N_0 = Grösse N zum Zeitpunkt t = 0

exponentielles Wachsen, falls $a>1$
(Bsp.: Kapital auf Bankkonto, Bakterienkultur)

exponentielles Fallen, falls $0<a<1$
(Bsp.: Radioaktiver Zerfall)

In den Naturwissenschaften und in der Technik wird ein exponentieller Verlauf meistens durch die Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt:

$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}$ (exponentielles Wachsen) bzw.

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ (exponentielles Fallen)

a) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Wachsens tatsächlich zu jedem $a>1$ ein $\lambda>0$ finden kann, so dass für alle t R gilt: $a^t = e^{\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

b) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Fallens tatsächlich zu jedem a ($0<a<1$) ein $\lambda>0$ finden kann, so dass für alle t R gilt: $a^t = e^{-\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

6. In der Aufgabe 1 wurde festgestellt, dass der zeitliche Verlauf eines Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.

Gemäss Aufgabe 5 kann jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e und dem Parameter λ ausgedrückt werden.

Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e, und bestimmen Sie den Wert des Parameters λ für den Zinssatz p = 0.5%.

7. Der mittlere Luftdruck in der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe über Meer näherungsweise exponentiell ab:

$p(h) = p_0\, e^{-\lambda h}$ wobei: h = Höhe über Meer
$p(h)$ = mittlerer Luftdruck auf der Höhe h
p_0 = mittlerer Luftdruck auf Meereshöhe = 1013 hPa

In Chur (h = 593 m) beträgt der mittlere Luftdruck 941 hPa.

Bestimmen Sie den mittleren Luftdruck auf dem Mount Everest (h = 8848 m).

8. Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl N der radioaktiven Kerne exponentiell ab:

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ ($\lambda>0$)

Zeigen Sie, dass die Zeitspannen, in welchen sich N jeweils halbiert, alle gleich lang sind.

Zu zeigen ist also, dass es - von einem beliebigen Zeitpunkt aus gesehen - immer jeweils gleich lang dauert, bis N jeweils wieder auf den halben Wert abgesunken ist.

Lösungen

1. a) $K(t) = K_0 \cdot (1+p)^t$, $[t]$ = Jahre

   b) $K(5) = 1000 \cdot (1+0.005)^5$ Fr. = 1025.25 Fr.

2. a) injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

   b) $A = R$
   $B = R^+$

   c) ...

3. $N(8h) = 3.04 \cdot 10^{13}$

4.

a)	1	b)	4	c)	5	d)	3
e)	4	f)	-4	g)	1	h)	x
i)	0	j)	$\frac{1}{2}$	k)	x	l)	$\frac{2}{e}$

5. a) $\lambda = \ln(a)$

   b) $\lambda = -\ln(a)$

6. $K(t) = K_0\, e^{\lambda t}$

   $\lambda = \ln(1+p) = 0.0049...$

7. $$\lambda = \frac{-\ln\left(p(h)/p_0\right)}{h} = \frac{-\ln\left(941\text{ hPa}/1013\text{ hPa}\right)}{593\text{ m}} = 1.24 \cdot 10^{-4}\text{ m}^{-1} \text{ (gerundet)}$$

   $p(8848\text{ m}) = 337$ hPa

8. ...