Übung 10 Funktionstypen
Trigonometrische Funktionen und Gleichungen, Arkusfunktionen

Lernziele

- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer einfacheren trigonometrischen Funktion skizzieren können.
- die Lösungen einer einfacheren trigonometrischen Gleichung von Hand bestimmen können.
- die Umkehrfunktion einer einfacheren trigonometrischen Funktion bestimmen können.

Aufgaben

1. Betrachten Sie die einfachstmögliche Sinus-Funktion f und die aus ihr abgeleiteten Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5:

   $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$

   $f_1: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_1(x) := \sin(x+b)$ (b R\{0})
   $f_2: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_2(x) := \sin(x) + c$ (c R\{0})
   $f_3: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_3(x) := \sin(a \cdot x)$ (a R^+)
   $f_4: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_4(x) := A \cdot \sin(x)$ (A R^+)
   $f_5: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_5(x) := A \cdot \sin(ax+b)$ (A R^+, a R^+, b R\{0})

   a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von

      i) f und f_1
      Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $b>0$ und $b<0$.

      ii) f und f_2
      Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $c>0$ und $c<0$.

      iii) f und f_3
      Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $a>1$ und $0<a<1$.

      iv) f und f_4
      Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $A>1$ und $0<A<1$.

      v) f und f_5 für den Fall $A>1$, $a>1$, $b<0$.

   b) Geben Sie für alle Funktionen f, f_1, ..., f_5 die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 an.

2. Papula: 303/5, 303/6, 303/4

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen:

   a) $\sin(x) = a$ $(-1 \leq a \leq 1)$

   b) $\cos(x) = b$ $(-1 \leq b \leq 1)$

   c) $\tan(x) = c$ (c R)

   d) $\cot(x) = d$ (d R)

4. Papula: 305/16

5. Bearbeiten Sie für die beiden Funktionen in der Aufgabe Papula 303/6 die folgenden Teilaufgaben:

   i) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass die Funktion bijektiv wird.

   ii) Skizzieren Sie den Grafen der bijektiven Funktion.

   iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

   iv) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion.

Lösungen

1. a) i) ...

ii) ...

iii) ...

iv) ...

v) ...

b)

f:	$A = 1$	$p = 2\pi$	$x_0 = 0$
f_1:	$A = 1$	$p = 2\pi$	$x_0 = -b$
f_2:	$A = 1$	$p = 2\pi$	$x_0 = 0$
f_3:	$A = 1$	$p = \frac{2\pi}{a}$	$x_0 = 0$
f_4:	$A = A$	$p = 2\pi$	$x_0 = 0$
f_5:	$A = A$	$p = \frac{2\pi}{a}$	$x_0 = -\frac{b}{a}$

2. siehe Papula

3. a) $x_{1k} = \arcsin(a) + k\cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$
$x_{2k} = \pi - \arcsin(a) + k\cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$

b) $x_{1k} = \arccos(b) + k\cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$
$x_{2k} = -\arccos(b) + k\cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$

c) $x_k = \arctan(c) + k\cdot\pi \;\; (k \;\; Z)$

d) $x_k = \text{arccot}(d) + k\cdot\pi \;\; (k \;\; Z)$

4. siehe Papula

5. a) i) $A = \left\{ x \;\; R \,\middle|\, -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} \right\}$ $B = \{y \;\; R \mid -4 \leq y \leq 4\}$

ii) ...

iii) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 2\right)$

iv) ...

b) i) $A = \left\{ x \;\; R \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \right\}$ $B = \{y \;\; R \mid -2 \leq y \leq 2\}$

ii) ...

iii) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right)$

iv) ...