Übung 8 — Funktionstypen
Ganzrationale Funktion

Lernziele

- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines Polynoms verstehen.
- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines einfacheren Polynoms bestimmen können.
- die Regel zum Auffinden von ganzzahligenNullstellen einer Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten anwenden können.
- charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende Polynomfunktion f vom Grad 3.

$$f:\ R \to R,\ x \to\ y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

a) i) Überprüfen Sie, dass x = 1 eine **Nullstelle** von f ist.

ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$$

Stellen Sie fest, dass es **möglich** ist, f(x) als Produkt des Linearfaktors (x - 1) und eines Polynoms g(x) darzustellen, wobei die Polynomfunktion g vom Grad 2 ist.

b) i) Überprüfen Sie, dass x = 2 **keine Nullstelle** von f ist.

ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$$

Stellen Sie fest, dass es **nicht möglich** ist, f(x) als Produkt des Linearfaktors (x - 2) und eines Polynoms g(x) darzustellen.

c) $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von f (siehe a)).
Bestimmen Sie die restlichen reellen Nullstellen von f, und stellen Sie f(x) in der Produktform dar.

2. Papula: 299/3 (nur Produktform), 299/7, 300/13 (ohne Horner-Schema)

3. Bestimmen Sie die Produktform der folgenden Polynome:

a) $f(x) = -2x^5 + 12x^4 - 2x + 12$ b) $f(x) = 3x^5 - 36x^4 + 141x^3 - 168x^2 - 108x + 240$

4. Betrachten Sie die allgemeine Polynomfunktion

$$f:\ R \to R,\ x \to\ y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad n \quad N_0,\ a_n \neq 0$$

a) Zeichnen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Grafen der folgenden konkreten Polynomfunktionen:

i) $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ ii) $f_2(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

iii) $f_3(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 1$

b) Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer Polynomfunktion vom Grad n. Gesucht sind Eigenschaften, die zwar von n, jedoch nicht von den konkreten Werten der Koeffizienten a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 abhängen.

Hinweise:
- Betrachten Sie die Grafen der Funktionen f_1, f_2 und f_3.
- Variieren Sie die Koeffizienten, und stellen Sie fest, welche Eigenschaften der Grafen unverändert bleiben.
- Betrachten Sie die Grafen von weiteren Polynomfunktionen.

Lösungen

1. a) i) ...

ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
g mit $g(x) = x^2 - x - 6$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2

b) i) ...

ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$

g mit $g(x) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$ ist keine Polynomfunktion

c) $x_2 = 3$, $x_3 = -2$
$f(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$

2. siehe Papula

3. a) $f(x) = -2(x-6)(x^4+1)$

b) $f(x) = 3(x-2)^2(x+1)(x-4)(x-5)$

4. a) ...

b) ...