Übung 4 Funktionen
Grundbegriffe, Zusammengesetzte Funktion

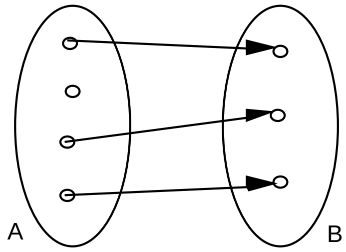
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- zwei gegebene Funktionen zu einer einzigen Funktion zusammensetzen können.
- eine gegebene Funktion als Zusammensetzung zweier Funktionen darstellen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

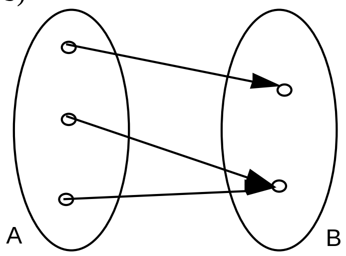
Aufgaben

1. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \to B$ ist:

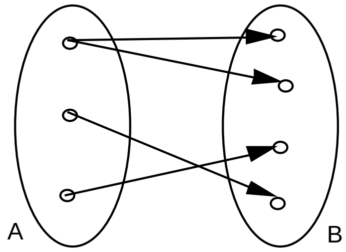
a)



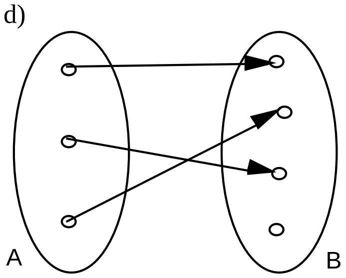
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller Architekten/-innen
$f\colon\ A \to B,\ h \to a = f(h)$ = Architekt/-in von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller Schweizer/-innen
$p\colon\ A \to B,\ x \to y = p(x)$ = Präsident/-in von x

g) $A = \{1977, 1978, \ldots, 1986, 1987\}$
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
$f\colon\ A \to B,\ j \to m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
$B = \{1977, 1978, \ldots, 1986, 1987\}$
$j\colon\ A \to B,\ m \to j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

i) $f\colon\ R \to R,\ x \to y = f(x) = x^2$

j) $f\colon\ R^+ \to R,\ x \to y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

k) $f\colon\ N \to N,\ x \to y = f(x)$ = Ganzzahliger Teiler von x

2. Gegeben sind die Mengen A und B.

Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2007
$B = R$

b) A = Menge aller Schweizer Firmen
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

d) $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$
$B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$

e) $A = R^-$
$B = R^+$

3. Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

a) A = {Januar, Februar, März, ..., Dezember}
B = {A, B, C, ..., Z}
f: $A \to B$, $m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
h: $A \to B$, $n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) $A = R$
$B = R_0^+$
b: $A \to B$, $x \to y = b(x) = |x|$

d) Funktion f aus Aufgabe 1 h)

e) Funktion f aus Aufgabe 1 i)

4. Gegeben ist die Funktion f: $R \to R$, $x \to f(x)$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i) $f(0)$
ii) $f(1)$
iii) $f(-1)$
iv) $f(a)$
v) $f(x+a)$

a) $f(x) = x^3-x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

5. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$

a) f: $R \to R$, $x \to y = f(x) = x^2$
g: $R \to R$, $y \to z = g(y) = -2y$

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \sin(x)$

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = \frac{y}{y^2+1}$

c) f: $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x \to y = f(x) = \frac{2}{x+1}$

g: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$

d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

g = f

e) A = Menge aller Studierenden der HTW Chur
B = Menge aller Länder der Erde
C = N (= Menge aller natürlichen Zahlen)

f: A → B, s → l = f(s) = Herkunftsland des Studierenden s
g: B → C, l → e = g(l) = Einwohnerzahl des Landes l

6. Gegeben ist die Funktion h.

Fassen Sie die Funktion h als zusammengesetzte Funktion auf, d.h. h = g∘f, und geben Sie die beiden Funktionen f und g an.

a) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = e^{-2x}$

b) h: $\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = (x-1)\cdot\sin(2x)$

c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = x$

d) A = Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden
C = Menge aller Tage eines Jahres

h: A → C, t → d = h(t) = Osterdatum im Einweihungsjahr des Autobahntunnels t

7. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt: g∘f = f∘g

Hinweis: Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 5 und 6.

Lösungen

1. a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle a A)
   b) Funktion
   c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)
   d) Funktion
   e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle h A)
   f) keine Funktion (p nicht definiert für alle x A)
   g) keine Funktion (f nicht eindeutig)
   h) Funktion
   i) Funktion
   j) keine Funktion (f nicht eindeutig)
   k) keine Funktion (f nicht eindeutig)

2. a) i) m: $A \to B$, $d \to T = m(d)$ = Maximaltemperatur in Chur am Tag d
   ii) ...
   iii) ...

   b) i) s: $A \to B$, $f \to k = s(f)$ = Kanton, an welchen f die meisten Steuern zahlen muss
   ii) ...
   iii) ...

   c) i) f: $A \to B$, $v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v
   ii) ...
   iii) ...

   d) i) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = 2x$
   ii) ...
   iii) ...

   e) i) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = -x$
   ii) ...
   iii) ...

3. a) W = {A, D, F, J, M, N, O, S}
   b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}
   c) W = B
   d) W = B
   e) $W = R_0^+$

4. a) i) $f(0) = 0^3 - 0 = 0$
   ii) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
   iii) $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$
   iv) $f(a) = a^3 - a$
   v) $f(x+a) = (x+a)^3 - (x+a)$

   b) i) $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$
   ii) $f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
   iii) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+1}$ nicht definiert

iv) $f(a) = \frac{a^2}{a+1}$

v) $f(x+a) = \frac{(x+a)^2}{x+a+1}$

5. a) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2x^2$

b) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+1}$

c) h: $\mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$

d) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{(x^2+1)^2}{1 + (x^2+1)^2}$

e) h: A → C, s → e = h(s) = (g∘f)(s) = g(f(s)) = Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden s

6. a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = -2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = e^y$

b) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \to y = f(x) = x-1$
g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = y \cdot \sin\big(2(y+1)\big)$

c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = 2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = \frac{y}{2}$

d) B = Menge aller Jahre von 1900 bis heute

f: A → B, t → j = f(t) = Einweihungsjahr des Autobahntunnels t
g: B → C, j → d = g(j) = Osterdatum im Jahr j

7. ...