Übung 2 — Vektoren, Skalarprodukt

Lernziele

- das Skalarprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes anwenden können.
- das Skalarprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

1. Papula: 129/10, 129/11, 130/17

2. Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge ein Rechteck bilden:

   A(7|6|3) B(4|10|1) C(-2|6|2) D(1|2|4)

3. Bestimmen Sie den Wert von k, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal werden, d.h. senkrecht aufeinander stehen:

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ -2k \end{pmatrix}$

4. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie den Wert von k, damit gilt:

   $(\vec{a} + k \cdot \vec{b}) \quad \vec{c}$

5. Mit $\vec{AB}_{(CD)}$ sei derjenige Vektor bezeichnet, den man erhält, wenn man den Vektor $\vec{AB}$ auf die Gerade (CD) projiziert.

   Bestimmen Sie den Vektor $\vec{AB}_{(CD)}$.

   a) A(-7|-5), B(0|-4), C(10|1), D(-6|13)

   b) A(1|-2|3), B(5|-8|1), C(2|4|3), D(-1|9|1)

6. Bestimmen Sie die Komponenten eines dreidimensionalen Vektors vom Betrag 20, welcher mit der x-Achse und mit der y-Achse je einen Winkel von 60° einschliesst.

7. Der Vektor $\vec{x}$ soll als Summe zweier Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ geschrieben werden.
   $\vec{y}$ soll dabei parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{z}$ senkrecht zu $\vec{b}$ sein:

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie $\vec{y}$ und $\vec{z}$.

Lösungen

1. siehe Papula

2. ...

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   a) $k = -2$
   b) $k = -1$

4. $k = 1$

5. a) $\vec{AB}_{(CD)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{AB}_{(CD)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \sqrt{2} \cdot 10 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -\sqrt{2} \cdot 10 \end{pmatrix}$

7. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \ \vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$