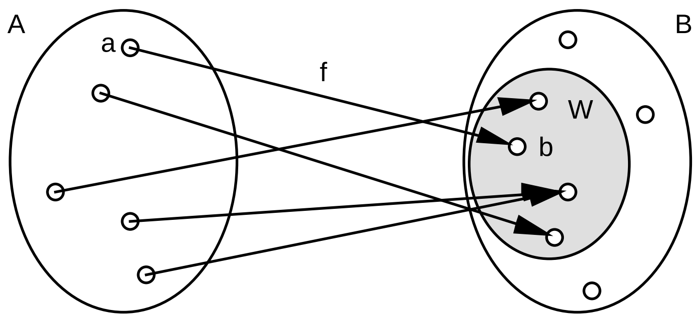
Funktion

Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element a aus einer Menge A **genau ein** Element b aus einer Menge B zuordnet.

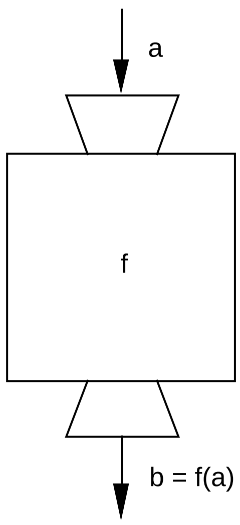


Durch die Funktion f wird die Menge A auf die Menge B **abgebildet**.

f: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = f(a)$ ("f von a")

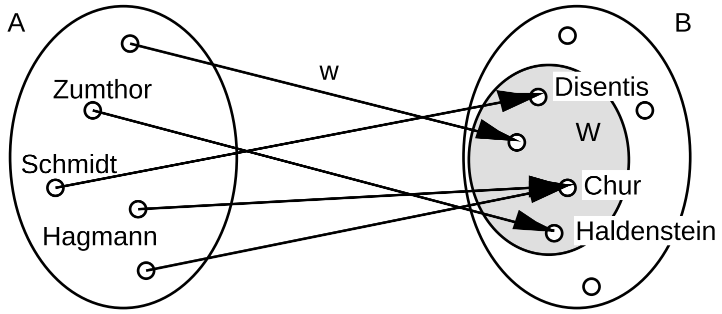
Die Menge A ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge B der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat), die Menge W der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion f.

b ist das zum Element a gehörige **Bildelement** (Funktionswert).



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \to B$
$a \to b = w(a)$ = Wohnort von a



2. A = Menge aller Eisenbahnbrücken im Kanton Graubünden
B = {1847, 1848, 1849, ..., 2005, 2006, 2007}

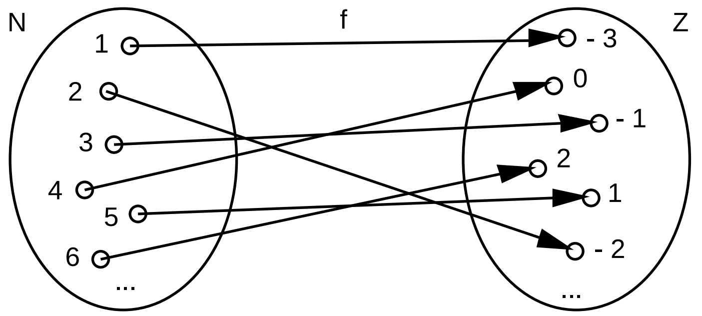
e: $A \to B$
$b \to j = e(b)$ = Jahr der Einweihung von b

3. A = B = Menge aller Punkte einer Ebene

S_g: $A \to A$
$P \to P' = S_g(P)$ = Bildpunkt von P bezüglich der Geradenspiegelung an der Geraden g

4. A = N (= Menge der natürlichen Zahlen)
B = Z (= Menge der ganzen Zahlen)

f: $N \to Z$
$n \to y = f(n) = n - 4$



5. $A = R_0^+$ (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)
B = R (= Menge der reellen Zahlen)

f: $R_0^+ \to R$
$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$

6. A = B = R

p: $R \to R$
$x \to y = p(x) = \frac{x^3-3}{2x^2+1}$

Darstellung einer Funktion

Pfeildiagramm

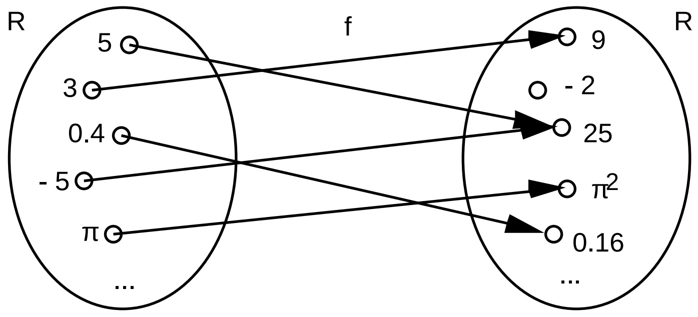


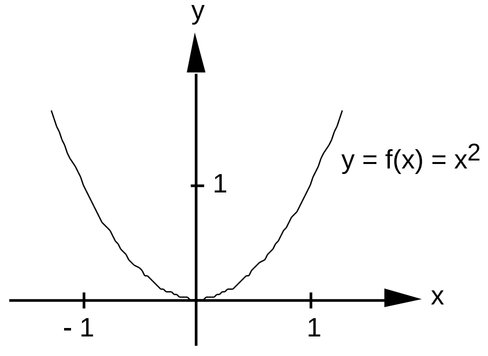
Tabelle (Wertetabelle)

x	y
1	1
3	9
5	25
- 5	25
0.4	0.16
...	...

Funktionsvorschrift (Funktionsgleichung)

f: $\quad R \rightarrow R$
$\quad x \rightarrow y = f(x) = x^2$

Graf



Zusammengesetzte Funktion

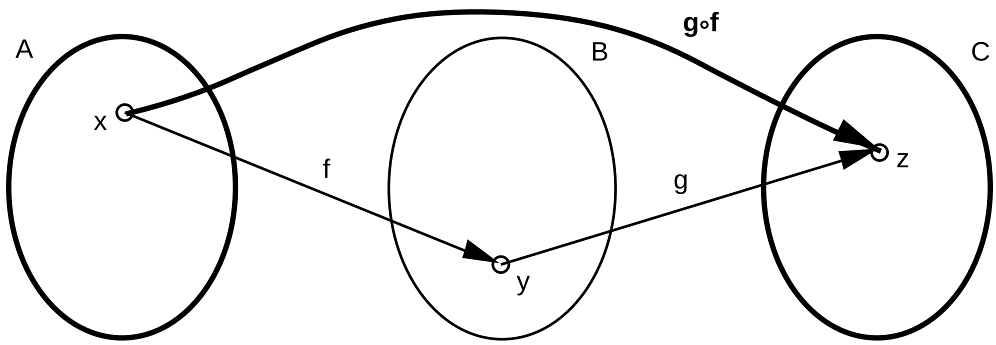
Gegeben seien zwei Funktionen f und g:

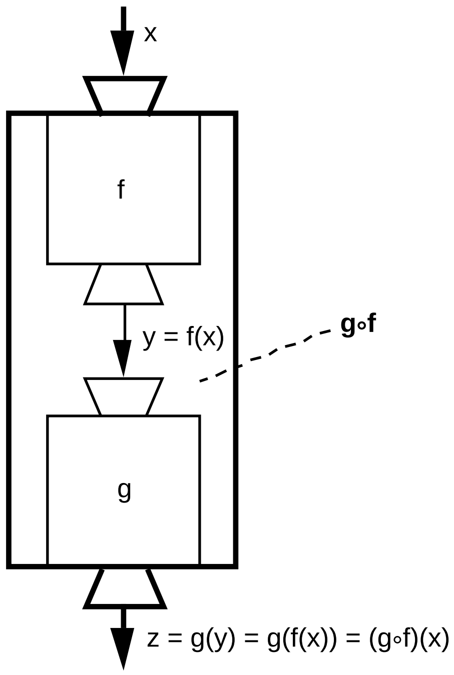
f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$ g: $B \to C$, $y \to z = g(y)$

Def.: Die **zusammengesetzte Funktion** $g \circ f$ ist definiert durch:

$g \circ f$: $A \to C$

$x \to z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$





Bsp.: f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, $x \to y = f(x) = \frac{x}{2}$ g: $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$, $y \to z = g(y) = \sqrt{y}$

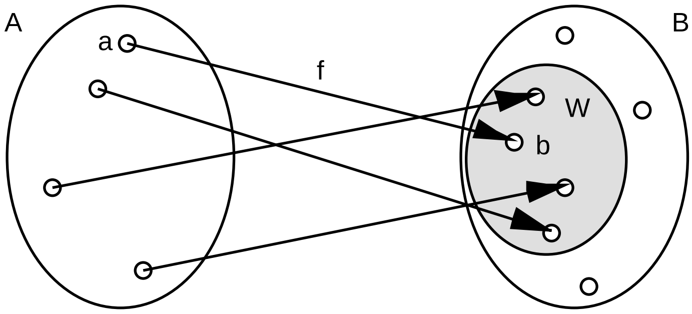
$g \circ f$: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

$x \to z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

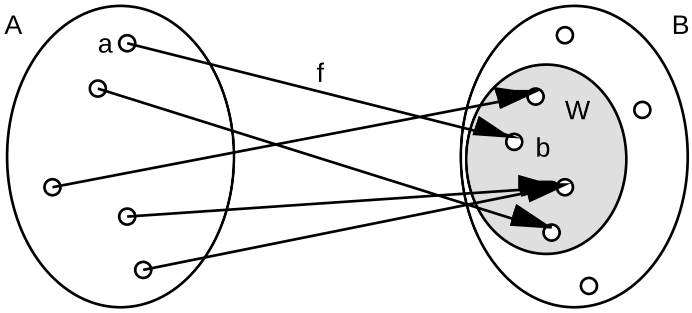
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **injektiv**, falls jedes Element b W Bildelement eines **einzigen** Elementes a A ist.

Injektive Funktion

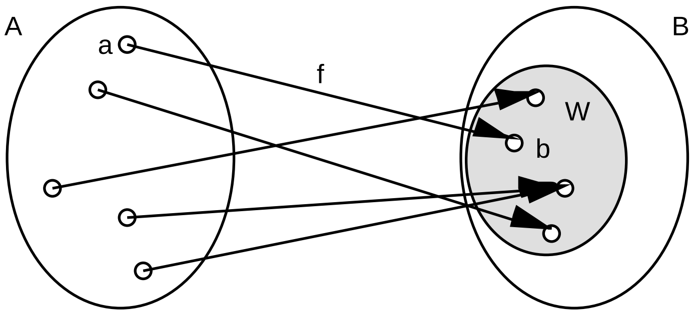


Nicht-injektive Funktion

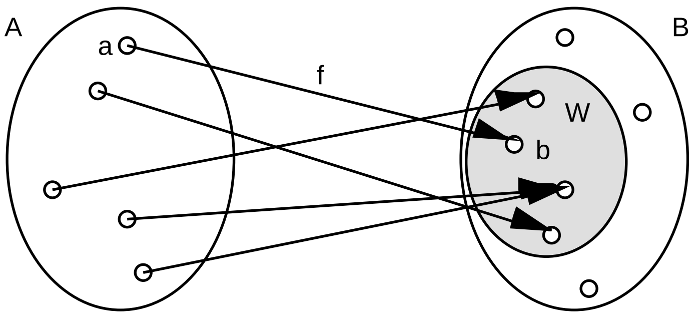


Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **surjektiv**, falls **jedes** Element b B als Bildelement auftritt, d.h. falls W = B.

Surjektive Funktion

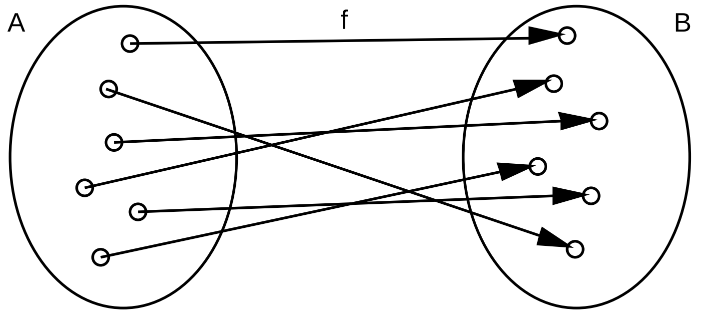


Nicht-surjektive Funktion



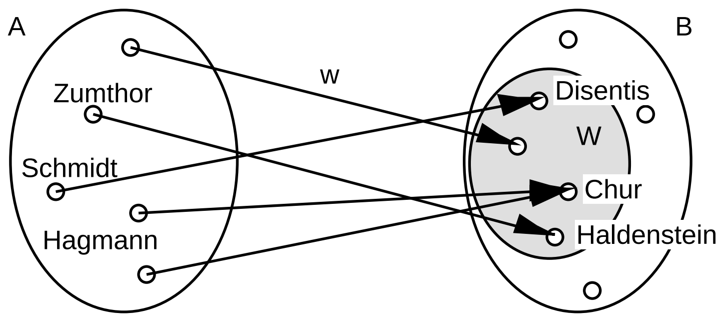
Def.: Eine Funktion f: A $\rightarrow$ B heisst **bijektiv**, falls sie **sowohl injektiv als auch surjektiv** ist.

Bijektive Funktion



Bsp.: 1. A = Menge aller in der Schweiz wohnhaften Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: A $\rightarrow$ B
a $\rightarrow$ b = w(a) = Wohnort von a



nicht injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

2. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = -x$

injektiv, surjektiv bijektiv

3. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

nicht injektiv, surjektiv nicht bijektiv

4. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

5. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, surjektiv bijektiv

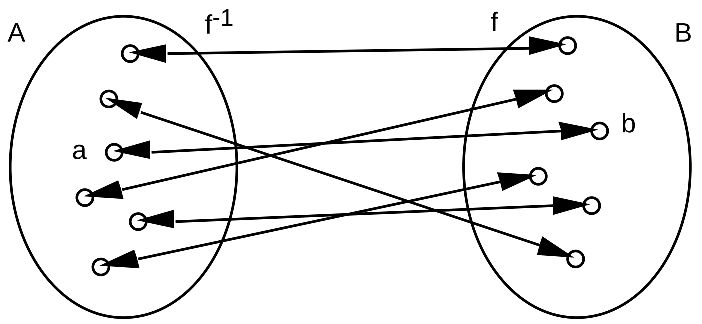
Umkehrfunktion

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

$$f: \quad A \rightarrow B$$
$$a \rightarrow b = f(a)$$

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} ordnet jedem Element b $\in$ B dasjenige Element a $\in$ A zu, welches durch die Funktion f dem Element b $\in$ B zugeordnet wird.

$$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$$
$$b \rightarrow a = f^{-1}(b)$$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher
B = Menge aller Sitzplätze

$f: \quad A \rightarrow B$
$x \rightarrow y = f(x)$ = Sitzplatz von Kinobesucher x

$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$
$y \rightarrow x = f^{-1}(y)$ = Kinobesucher auf Sitzplatz y

2. A = Z
B = {..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...}

$f: \quad A \rightarrow B$
$x \rightarrow y = f(x) = 2x$

$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$
$y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$

3. $f: \quad R_0^+ \rightarrow R_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

$f^{-1}: \quad R_0^+ \rightarrow R_0^+$
$y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Def.: Die **identische Abbildung/Funktion** $\mathbb{1}$ ist definiert durch:

$\mathbb{1}: \quad A \rightarrow A$
$x \rightarrow y = \mathbb{1}(x) = x$

Bem.: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$